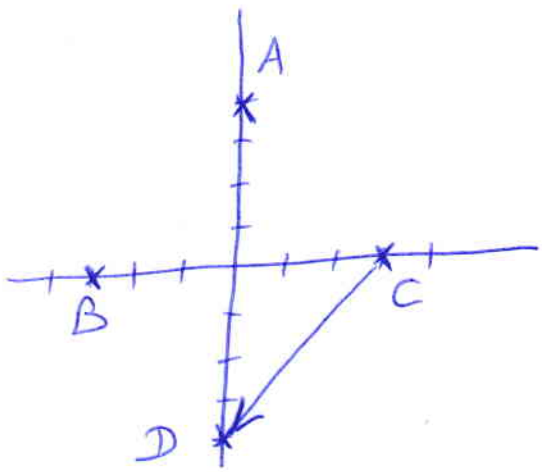
PROBLEMAS RESUELTOS DE GRAVITACIÓN

1 Datos: $m_1 = 500$ kg → A (0,4) m ; $m_2 = 500$ kg → B (−3,0) m ; ¿W? $m_3 = 250$ kg C (3,0) m → D (0,−4) m ; $G = 6'67 \cdot 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2}$

Dibujo:



Principio físico: el campo gravitatorio es conservativo y el trabajo realizado es el menos incremento de la energía potencial.

Método de resolución: usaremos la expresión:

$$W_{CD} = -\Delta Ep = Ep_C - Ep_D = m_3 \cdot (V_C - V_D)$$

Resolución:

$$V_C = V_{AC} + V_{BC} = \frac{G \cdot m_1}{r_{AC}} + \frac{G \cdot m_2}{r_{BC}} =$$

$$= 6'67 \cdot 10^{-11} \cdot \left(\frac{500}{\sqrt{3^2+4^2}} + \frac{500}{6} \right) = 1'22 \cdot 10^{-8} \frac{J}{kg}$$

$$V_D = V_{AD} + V_{BD} = \frac{G \cdot m_1}{r_{AD}} + \frac{G \cdot m_2}{r_{BD}} =$$

$$= 6'67 \cdot 10^{-11} \cdot \left(\frac{500}{8} + \frac{500}{\sqrt{3^2+4^2}} \right) = 1'08 \cdot 10^{-8} \frac{J}{kg}$$

$$W_{CD} = m_3 \cdot (V_C - V_D) = 250 \cdot (1'22 \cdot 10^{-8} - 1'08 \cdot 10^{-8}) =$$

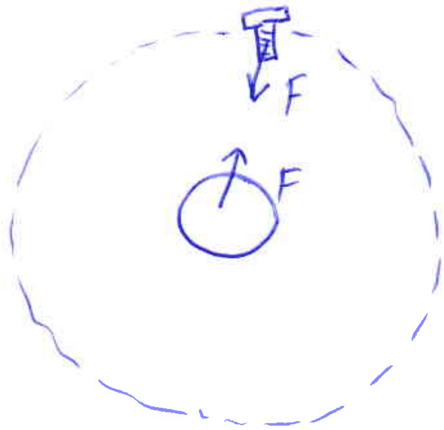
$$= \boxed{3'5 \cdot 10^{-7}\ J}$$

Comentario: como el trabajo es positivo, el proceso es espontáneo y no requiere una fuerza externa.

(2) Datos: $m = 150\ g$, $h = 900\ km$, ¿F?, ¿t?

$G = 6'67 \cdot 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2}$, $R_T = 6'37 \cdot 10^6\ m$, $M_T = 5'97 \cdot 10^{24}\ kg$

Dibujo:



Principio físico: según la tercera ley de Newton (ley de acción y reacción) la fuerza con la que se atraen el tornillo y la Tierra son iguales en módulo y dirección y de sentidos contrarios.

Método de resolución: usaremos la ley de gravitación universal y la fórmula del período.

Resolución:

$$F_G = G \cdot \frac{M_T \cdot m}{r^2} = \frac{G \cdot M_T \cdot m}{(R_T + h)^2} =$$

$$= \frac{6'67 \cdot 10^{-11} \cdot 5'97 \cdot 10^{24} \cdot 0'150}{(6'37 \cdot 10^6 + 9 \cdot 10^5)^2} = \boxed{1'13\ N}$$

$$T = \frac{2\pi r}{v} \quad ; \quad F_G = F_c \Rightarrow \frac{G \cdot M_T \cdot \cancel{m}}{r^{\cancel{2}}} = \frac{\cancel{m} \cdot v^2}{\cancel{r}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v^2 = \frac{G \cdot M_T}{r}$$

$$T^2 = \frac{4 \cdot \pi \cdot r^2}{v^2} = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r^2}{\frac{G \cdot M_T}{r}} = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r^3}{G \cdot M_T}$$

$$T = \sqrt{\frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r^3}{G \cdot M_T}} = \sqrt{\frac{4 \cdot \pi^2 \cdot (6'37 \cdot 10^6 + 9 \cdot 10^5)^3}{6'67 \cdot 10^{-11} \cdot 5'97 \cdot 10^{24}}} =$$

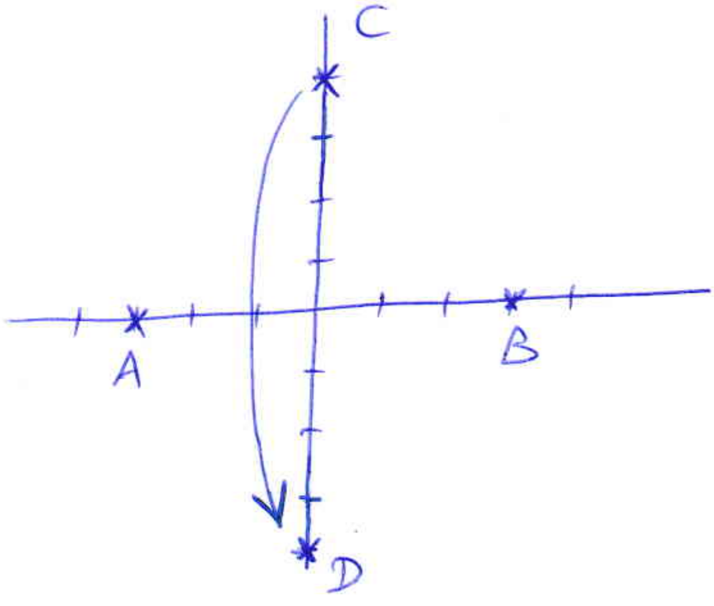
$$= 6169 \text{ s} = \boxed{1 \text{ h } 43 \text{ min}}$$

Comentario: cuanto más cerca esté el tornillo orbitando alrededor de la Tierra, mayor será su velocidad orbital y menor su periodo.

3) Datos: $m_1 = m_2 = 50$ kg ; $A(-3,0)$, $B(3,0)$, $C(0,4)$, $D(0,-4)$, ¿W?, $m_3 = 30$ kg,

$G = 6'67 \cdot 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2}$

Dibujo:



Principio físico: el trabajo necesario para trasladar una masa de un punto a otro es menos la variación de energía potencial.

Método de resolución: usaremos la fórmula del trabajo de una fuerza conservativa.

Resolución:

$$W_{CD} = -\Delta E_p = E_{p_C} - E_{p_D} = m_3 \cdot (V_C - V_D)$$

$$V_C = V_{AC} + V_{BC} = \frac{G \cdot m_1}{r_{AC}} + \frac{G \cdot m_2}{r_{BC}} =$$

$$= 6'67 \cdot 10^{-11} \cdot 50 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3^2+4^2}} + \frac{1}{\sqrt{3^2+4^2}} \right) =$$

$$= 6'67 \cdot 10^{-11} \cdot 50 \cdot \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{5} \right) = 1'334 \cdot 10^{-9} \frac{J}{kg}$$

$V_D = 1'334 \cdot 10^{-9} \frac{J}{kg}$, pues las masas y las distancias son las mismas.

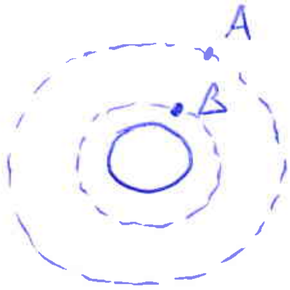
$$W_{CD} = m_3 \cdot (V_C - V_D) = 30 \cdot (1'334 \cdot 10^{-9} - 1'334 \cdot 10^{-9}) =$$

$$= \boxed{0 \ J}$$

Comentario: el trabajo necesario para mover una masa por una superficie equipotencial es cero.

④ **Datos:** $h = 20\ km$, $v = 18\ \frac{km}{s}$, ¿v_0?, $h = 30.000\ km$, $G = 6'67 \cdot 10^{-11}\ \frac{N \cdot m^2}{kg^2}$, $M_T = 5'97 \cdot 10^{24}\ kg$, $R_T = 6'37 \cdot 10^6\ m$

Dibujo:



Principio físico: como no existe rozamiento ni otras fuerzas no conservativas, se conserva la energía mecánica.

Método de resolución: aplicaremos el principio de conservación de la energía.

Resolución:

$$Ec_A + Ep_A = Ec_B + Ep_B \ ; \ \frac{1}{2} \cdot \cancel{m} \cdot v_A^2 - \frac{G \cdot M_T \cdot \cancel{m}}{r_A} = \frac{1}{2} \cdot \cancel{m} \cdot v_B^2 - \frac{G \cdot M_T \cdot \cancel{m}}{r_B}$$

$$v_A^2 - \frac{2 \cdot G \cdot M_T}{R_T + h_A} = v_B^2 - \frac{2 \cdot G \cdot M_T}{R_T + h_B}$$

$$v_A = \sqrt{v_B^2 + 2 \cdot G \cdot M_T \cdot \left(\frac{1}{R_T + h_A} - \frac{1}{R_T + h_B} \right)}$$

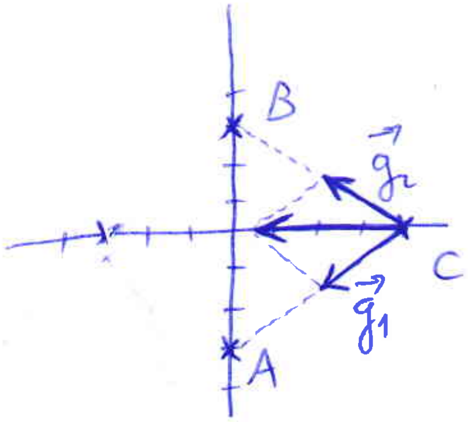
$$v_A = \sqrt{(1'8\cdot 10^4)^2 + 2\cdot 6'67\cdot 10^{-11}\cdot\left(\frac{5'97\cdot 10^{24}}{6'37\cdot 10^6+3\cdot 10^7} - \frac{5'97\cdot 10^{24}}{6'37\cdot 10^6+2\cdot 10^4}\right)} =$$

$$= 14.800\ \frac{m}{s} = \boxed{14'8\ \frac{km}{s}}$$

Comentario: cuanta mayor la altura, menor la velocidad.

(5) Datos: $m_1 = m_2 = 100\ kg$, $A(0,-3)$, $B(0,3)$, ¿g?, $C(4,0)$, $G = 6'67\cdot 10^{-11}\ \frac{N\cdot m^2}{kg^2}$

Dibujo:



Principio físico: el campo gravitatorio es una perturbación del espacio provocada por una masa. Es un vector.

Método de resolución: aplicaremos el principio de superposición.

Resolución:

$$\vec{g} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2$$

$$g_1 = g_2 = \frac{G \cdot M}{r^2} = \frac{6'67 \cdot 10^{-11} \cdot 100}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 1'33 \cdot 10^{-9} \ \frac{m}{s^2}$$

$$\vec{g}_1 = -g_1 \cdot \cos\alpha \cdot \vec{i} - g_1 \cdot \operatorname{sen}\alpha \cdot \vec{j} =$$

$$= -1'33 \cdot 10^{-9} \cdot \frac{4}{5} \cdot \vec{i} - 1'33 \cdot 10^{-9} \cdot \frac{3}{5} \cdot \vec{j} = -1'06 \cdot 10^{-9} \cdot \vec{i} - 7'98 \cdot 10^{-10} \cdot \vec{j} \ \frac{m}{s^2}$$

$$\vec{g}_2 = -g_2 \cdot \cos\alpha \cdot \vec{i} + g_1 \cdot \operatorname{sen}\alpha \cdot \vec{j} =$$

$$= -1'33 \cdot 10^{-9} \cdot \frac{4}{5} \cdot \vec{i} + 1'33 \cdot 10^{-9} \cdot \frac{3}{5} \cdot \vec{j} = -1'06 \cdot 10^{-9} \cdot \vec{i} + 7'98 \cdot 10^{-10} \cdot \vec{j} \ \frac{m}{s^2}$$

$$\vec{g} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 = 2 \cdot (-1'06 \cdot 10^{-9}) \cdot \vec{i} = \boxed{-2'12 \cdot 10^{-9} \cdot \vec{i} \ \frac{m}{s^2}}$$

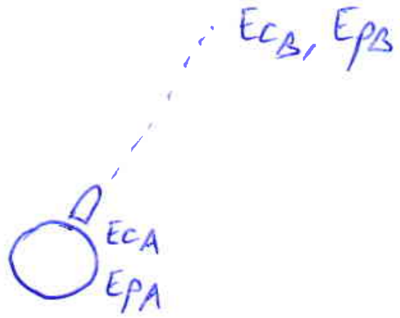
$$\boxed{g = 2'12 \cdot 10^{-9} \ \frac{m}{s^2}}$$

Comentario: el valor del campo total es pequeño porque las masas no son muy grandes.

⑥ <u>Datos:</u> $M_J = 300 \cdot M_T$, $D_J = 10 \cdot D_T$, ¿v_e?

$R_T = 6'37 \cdot 10^6$ m , $g = 9'8 \ \frac{m}{s^2}$

<u>Dibujo:</u>



<u>Principio físico:</u> la velocidad de escape es la velocidad inicial mínima que hay que imprimirle a un cuerpo para que escape del campo gravitatorio de un planeta y llegue al infinito con velocidad nula.

<u>Método de resolución:</u> como no hay fuerzas no conservativas, usaremos el principio de conservación de la energía mecánica.

<u>Resolución:</u>

$$Ec_A + Ep_A = Ec_B + Ep_B$$

$$\frac{1}{2} \cdot \cancel{m} \cdot v_A^2 - \frac{G \cdot M_J \cdot \cancel{m}}{R_J} = \cancelto{0}{\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_B^2} - \cancelto{0}{\frac{G \cdot M_J \cdot m}{r}}$$

$$v_e = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M_J}{R_J}}$$

Por otro lado: $g = \frac{G \cdot M_T}{R_T^2} \Rightarrow G \cdot M_T = g \cdot R_T^2$

Luego: $v_e = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M_J}{R_J}} = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot 300 \cdot M_T}{10 \cdot R_T}} =$

$= \sqrt{\frac{60 \cdot G \cdot M_T}{R_T}} = \sqrt{\frac{60 \cdot g \cdot R_T^{\cancel{2}}}{\cancel{R_T}}} = \sqrt{60 \cdot g \cdot R_T} =$

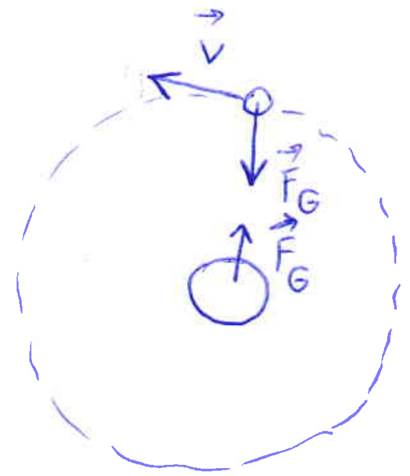
$= \sqrt{60 \cdot 9'8 \cdot 6'37 \cdot 10^6} = \boxed{61200 \ \frac{m}{s}}$

Comentario: la velocidad de escape es tanto mayor cuanto mayor sea la masa del planeta y menor su tamaño.

7 b) Datos: ¿v?, ¿T?, $G = 6'67 \cdot 10^{-11} \ \frac{N \cdot m^2}{kg^2}$,

$M_T = 5'97 \cdot 10^{24}$ kg, $d_{TL} = 3'84 \cdot 10^8$ m

Dibujo:



Principio físico: cuando un satélite orbita alrededor de un planeta, su fuerza de atracción gravitatoria es compensada por la fuerza centrípeta.

Método de resolución: igualaremos la fuerza de la gravedad con la fuerza centrípeta.

Resolución:

$$F_G = F_C \; ; \quad \frac{G \cdot M_T \cdot \cancel{m_L}}{r^{\cancel{2}}} = \frac{\cancel{m_L} \cdot v^2}{\cancel{r}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{r}} = \sqrt{\frac{6'67 \cdot 10^{-11} \cdot 5'97 \cdot 10^{24}}{3'84 \cdot 10^8}} =$$

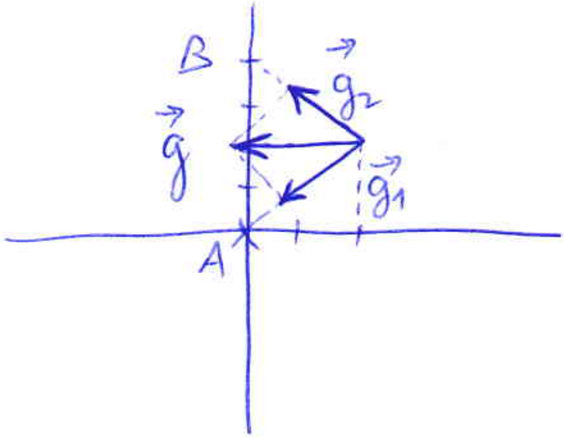
$$= \boxed{1018 \ \frac{m}{s}}$$

$$T = \frac{2 \pi r}{v} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 3'84 \cdot 10^8}{1018} = 2'37 \cdot 10^6 \, s = \boxed{27 \text{ días } 10 \text{ h}}$$

Comentario: la velocidad orbital no depende de la masa del satélite, sino de la del planeta. La luna, curiosamente, tarda el mismo tiempo en rotar sobre sí misma que en dar una vuelta a la Tierra.

⑧ Datos: $m_1 = m_2 = 10$ kg, $A(0,0)$, $B(0,4)$, ¿g?, $C(2,2)$, $G = 6'67 \cdot 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2}$

Bibujo:



Principio físico: el campo gravitatorio es una perturbación del espacio provocada por la presencia de una masa. Es una magnitud vectorial.

Método de resolución: aplicaremos el principio de superposición.

Resolución:

$$\vec{g} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 \quad ; \quad g_1 = g_2 = \frac{G \cdot m}{r^2} =$$

$$= \frac{6'67 \cdot 10^{-11} \cdot 10}{2^2 + 2^2} = \frac{6'67 \cdot 10^{-10}}{8} = 8'34 \cdot 10^{-12} \ \frac{m}{s^2}$$

$$\vec{g}_1 = -g_1 \cdot \cos\alpha \cdot \vec{i} - g_1 \cdot \operatorname{sen}\alpha \cdot \vec{j} =$$

$$= -8'34 \cdot 10^{-12} \cdot \cos 45^\circ \cdot \vec{i} - 8'34 \cdot 10^{-12} \cdot \operatorname{sen} 45^\circ \cdot \vec{j} =$$

$$= -4'38 \cdot 10^{-12} \cdot \vec{i} - 4'38 \cdot 10^{-12} \cdot \vec{j}$$

$$\vec{g}_2 = -g_2 \cdot \cos\alpha \cdot \vec{i} + g_2 \cdot \operatorname{sen}\alpha \cdot \vec{j} =$$

$$= -8'34 \cdot 10^{-12} \cdot \cos 45^\circ \cdot \vec{i} + 8'34 \cdot 10^{-12} \cdot \operatorname{sen} 45^\circ \cdot \vec{j} =$$

$$= -4'38 \cdot 10^{-12} \cdot \vec{i} + 4'38 \cdot 10^{-12} \cdot \vec{j}$$

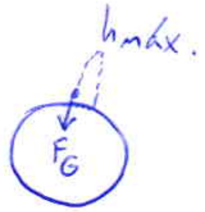
$$\vec{g} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 = 2 \cdot (-4'38) \cdot 10^{-12} \cdot \vec{i} = \boxed{-8'76 \cdot 10^{-12} \cdot \vec{i}} \ \frac{m}{s^2}$$

$$\boxed{g = 8'76 \cdot 10^{-12} \ \frac{m}{s^2}}$$

Comentario: el valor del campo es extremadamente pequeño, pues masas pequeñas producen campos pequeños.

⑨ Datos: $R_M = 2440\ km$, $g_M = 3'7\ \frac{m}{s^2}$, ¿$h_{máx}$?, $v = 0'5\ \frac{m}{s}$, $G = 6'67 \cdot 10^{-11}\ \frac{N \cdot m^2}{kg^2}$

Dibujo:



Principio físico: se le aplica una velocidad instantánea inicial, experimenta un MRUR hacia arriba, se anula su velocidad y cae con un MRUA.

Método de resolución: como la fuerza de la gravedad es conservativa, usaremos el principio de conservación de la energía mecánica.

Resolución:

$$Ec_A + Ep_A = \cancel{Ec_B}^{\,0} + Ep_B$$

$$\frac{1}{2} \cdot \cancel{m} \cdot v_A^2 - \frac{G \cdot M_M \cdot \cancel{m}}{R_M} = 0 - \frac{G \cdot M_M \cdot \cancel{m}}{R_M + h}$$

$$v_A^2 - \frac{2 \cdot G \cdot M_M}{R_M} = \frac{-2 \cdot G \cdot M_M}{R_M + h}$$

$$\frac{2\cdot G\cdot M_M}{R_M+h}=\frac{2\cdot G\cdot M_M}{R_M}-V_A^2$$

Por otro lado: $g_M=\frac{G\cdot M_M}{R_M^2} \Rightarrow G\cdot M_M=g_M\cdot R_M^2$

Luego: $\frac{2\cdot g_M\cdot R_M^2}{R_M+h}=\frac{2\cdot g_M\cdot R_M^{\cancel{2}}}{\cancel{R_M}}-V_A^2$

$$\frac{R_M+h}{2\cdot g_M\cdot R_M^2}=\frac{1}{2\cdot g_M\cdot R_M-V_A^2}\ ;\ R_M+h=\frac{2\cdot g_M\cdot R_M^2}{2\cdot g_M\cdot R_M-V_A^2}$$

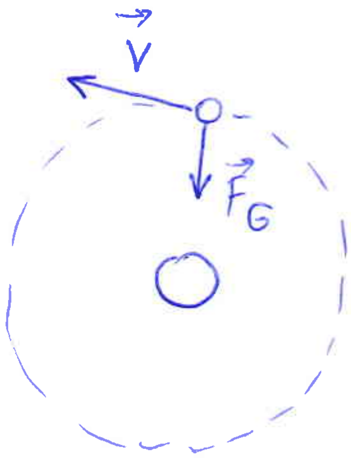
$$h=\frac{2\cdot g_M\cdot R_M^2}{2\cdot g_M\cdot R_M-V_A^2}-R_M=$$

$$=\frac{2\cdot 3'7\cdot(2'44\cdot 10^6)^2}{2\cdot 3'7\cdot 2'44\cdot 10^6-0'5^2}-2'44\cdot 10^6=0'0338\ m=\boxed{3'38\ cm}$$

Comentario: la altura máxima alcanzada es pequeñísima porque la velocidad inicial también lo es.

(10) Datos: $m = 1400\ kg$, $v = 7611'9\ \frac{m}{s}$, ¿E_p?, $G = 6'67 \cdot 10^{-11}\ \frac{N \cdot m^2}{kg^2}$, $M_T = 5'97 \cdot 10^{24}\ kg$, $R_T = 6'37 \cdot 10^6\ m$

Dibujo:



Principio físico: cuando un satélite orbita alrededor de un planeta, su velocidad orbital compensa la atracción gravitatoria.

Método de resolución: igualaremos la fuerza de la gravedad con la fuerza centrípeta.

Resolución:

$$F_G = F_c \Rightarrow \frac{G \cdot M \cdot \cancel{m}}{r^{\cancel{2}}} = \frac{\cancel{m} \cdot v^2}{\cancel{r}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r = \frac{G \cdot M_T}{v^2} = \frac{6'67 \cdot 10^{-11} \cdot 5'97 \cdot 10^{24}}{7611'9^2} =$$

$$= 6'87 \cdot 10^6\ m$$

$$E_p = -\frac{G \cdot M_T \cdot m}{r} = \frac{-6'67 \cdot 10^{-11} \cdot 5'97 \cdot 10^{24} \cdot 1400}{6'87 \cdot 10^{6}} =$$

$$= \boxed{-8'11 \cdot 10^{10}\ J}$$

Comentario: la energía potencial gravitatoria es el trabajo necesario para llevar una masa desde un punto hasta el infinito. El signo negativo indica que el proceso es no espontáneo y que se necesita una fuerza no conservativa para hacerlo.