CUESTIONES RESUELTAS DE GRAVITACIÓN

1) a) Explique el concepto de escape y deducir razonadamente su expresión. b) ¿Qué ocurriría en la realidad si lanzamos un cohete desde la superficie de la Tierra con una velocidad igual a la velocidad de escape?

Solución: la velocidad de escape para un planeta se define como la velocidad a la que habría que lanzar un cuerpo desde la superficie del planeta para que escapara de su atracción gravitatoria, alejándose indefinidamente. En este cálculo se desprecia el rozamiento con la atmósfera. Resolvemos el problema empleando conceptos energéticos: en primer lugar tenemos en cuenta que, al no tener en cuenta el rozamiento, la única fuerza que va a actuar sobre el movimiento del cohete será la gravitato ria, que es conservativa. Por lo tanto, la energía mecánica del cohete se mantendrá constante. Datos: M, R: masa y radio del planeta; m: masa del proyectil. Sistemas de referencia: mediremos las distancias desde el centro del planeta. El origen de energía potencial gravitatoria lo colocamos a una distancia infinita del centro planetario, por lo que la expresión usada para la Ep_G será:

$$Ep_G = -\frac{G \cdot M \cdot m}{R}$$

Consideraremos dos situaciones: Inicial: Lanzamiento del cohete desde la superficie terrestre con velocidad v_e:

$$Ec_1 = \frac{1}{2} m v_e^2 \quad ; \quad Ep_{G1} = -\frac{G \cdot M \cdot m}{R} \quad ; \quad E_{M1} = Ec_1 + Ep_1 = \frac{1}{2} m v_e^2 - \frac{G \cdot M \cdot m}{R}$$

Final: el cohete se aleja indefinidamente. En el límite, cuando la distancia r tiende a infinito, la velocidad (y la Ec) tiende a cero, al igual que la energía potencial, ya que el origen de Ep está colocado en el infinito.

$E_{M2} = Ec_2 + Ep_2 = 0$

Aplicando la conservación de la energía mecánica: $E_{M1} = E_{M2} \rightarrow \frac{1}{2} m v_e^2 - \frac{G \cdot M \cdot m}{R} = 0 \rightarrow$

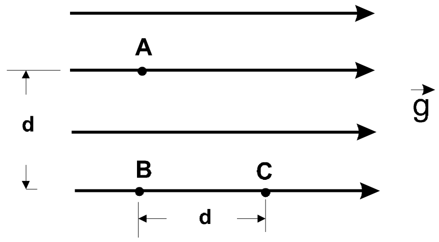
$$\rightarrow \frac{1}{2} m v_e^2 = \frac{G \cdot M \cdot m}{R} \rightarrow v_e = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M}{R}}$$

Puesto en función de la gravedad en superficie: $v_e = \sqrt{2 \cdot g_0 \cdot R}$

Nótese que la velocidad de escape desde la superficie de un planeta sólo depende de las características (masa, tamaño) del planeta. No importa la masa del proyectil. (Evidentemente, para acelerar un proyectil de más masa hasta esa velocidad se necesitará un mayor esfuerzo, pero eso es otra cuestión). También puede hablarse de velocidad de escape desde una cierta altura h sobre la superficie. El concepto es el mismo, solo que en lugar de R pondremos R+h.

b) En la realidad la situación física difiere de lo explicado anteriormente. La presencia de la atmósfera terrestre introduce una fuerza no conservativa, la fuerza de rozamiento, que no puede ser despreciada. De hecho, a las elevadas velocidades de las que estamos hablando, tendrá un valor muy grande. El efecto que produce este rozamiento es una disminución de la velocidad (de la Ec) y una disipación de energía en forma de calor, por lo que la energía mecánica del cohete no se mantendrá constante y disminuirá conforme se eleva según la expresión: $W_{ROZ} = \Delta E_M$

De este modo, al salir de la atmósfera no te ndrá energía suficiente como para alejarse indefinidamente, y llegará un momento, a una cierta a ltura, en que el cohete se pare y vuelva a caer hacia la Tierra.



2) En una región en la que existe un campo gravitatorio uniforme de intensidad g, representado en la figura por sus líneas de campo. a) Razone el valor del trabajo que se realiza al trasladar la unidad de masa desde el punto A al B y desde B al C. b) Analice las analogías y diferencias entre el campo descrito y el campo gravitatorio terrestre.

Solución: a) Nos encontramos ante un campo gravitatorio de intensidad constante. La fuerza gravitatoria que ejercerá este campo sobre una partícula de masa m colocada en su interior vendrá dada por: $\mathbf{F_G} = m \cdot \mathbf{g}$; y también será constante. El trabajo que realiza esta fuerza en un desplazamiento, que en general se calcula con la integral: $W_{AB} = \int_A^B F \cdot dr$, podrá hacerse en este caso, al ser la fuerza constante, con la expresión: $W_{AB} = \mathbf{F} \cdot \Delta\mathbf{r} = F \cdot \Delta r \cdot \cos\alpha$

Así, en el desplazamiento de A a B, el trabajo será: $W_{AB} = \mathbf{F_G} \cdot \Delta\mathbf{r} = m \cdot g \cdot d \cdot \cos 90^o = 0$ J, ya que la fuerza es perpendicular al desplazamiento. En el desplazamiento de B a C, el trabajo será:
$W_{BC} = \mathbf{F_G} \cdot \Delta\mathbf{r} = m \cdot g \cdot d \cdot \cos 0^o = m \cdot g \cdot d$. Obtenemos un trabajo positivo, ya que la fuerza favorece el desplazamiento. En este caso, ya que nos dicen que la unidad de masa, el trabajo será:
$W_{BC} = g \cdot d$
b) El campo gravitatorio descrito es similar al campo gravitatorio terrestre al nivel de la superficie, considerando la aproximación de que los desplazamientos efectuados son muy pequeños en comparación con el radio terrestre ($R_T \sim 6400$ km). En este caso, g terrestre puede considerarse un campo constante y uniforme con todas las características del campo de esta cuestión. La única diferencia está en su orientación. La dirección y sentido del campo terrestre es la vertical y su sentido hacia abajo, aunque esto último puede ser también una cuestión de punto de vista, del sistema de referencia escogido.

3) Se suele decir que la energía potencial gravitatoria de un cuerpo de masa **m** situado a una altura **h** viene dada por la expresión $E_P = mgh$. a) ¿Es correcta esta afirmación? ¿Por qué? b) ¿En qué condiciones es válida dicha fórmula?
Solución: la ecuación es únicamente válida en el caso en el que la altura sobre la superficie terrestre sea despreciable frente al radio de la Tierra. Para los casos en los que esto no sea cierto, la expresión no resulta correcta, por lo que debe utilizarse la expresión general que indica la energía potencial de un cuerpo en un determinado punto de un campo gravitatorio. Vamos a demostrarlo matemáticamente. La expresión general de la energía potencial es: $Ep = -\frac{G \cdot M \cdot m}{R}$. La variación de energía potencial será:

$$\Delta Ep = Ep_B - Ep_A = -\frac{G \cdot M_T \cdot m}{R_T + h} + \frac{G \cdot M_T \cdot m}{R_T} = -G \cdot M_T \cdot m \cdot \left(\frac{1}{R_T + h} - \frac{1}{R_T}\right) =$$

$$= -G \cdot M_T \cdot m \cdot \frac{R_T - R_T - h}{R_T \cdot (R_T + h)} = \frac{G \cdot M_T \cdot m \cdot h}{R_T \cdot (R_T + h)}$$

En el caso en el que $R_T >> h \rightarrow R_T + h \sim R_T \rightarrow \Delta Ep = \frac{G \cdot M_T \cdot m \cdot h}{R_T \cdot (R_T + h)} \sim \frac{G \cdot M_T \cdot m \cdot h}{R_T^2}$

Y como $g = \frac{G \cdot M_T}{R_T^2} \rightarrow \Delta Ep = m\, g\, h$, siendo h la diferencia de alturas. Una expresión más general sería: $\Delta Ep = m\, g\, \Delta h$

b) Como dijimos al principio del apartado a), esta expresión es únicamente válida bajo la condición esgrimida, que $R_T >> h \rightarrow R_T + h \sim R_T$. En caso de no cumplirse la condición, debe emplearse la expresión general de la energía potencial. Si consideramos un error razonable el menor o igual al 5 %: $\frac{h}{R_T + h} \leq 0'05 \rightarrow h \leq 0'05 \cdot R_T + 0'05 \cdot h \rightarrow 0'95 \cdot h \leq 0'05 \cdot R_T \rightarrow$

$\rightarrow h \leq \frac{0'05 \cdot R_T}{0'95} = \frac{0'05 \cdot 6370}{0'95} = 335$ km.

Por debajo de 335 km, la aproximación es aceptable.

4) a) Escriba la ley de Gravitación Universal y explique su significado físico. b) Según la ley de Gravitación, la fuerza que ejerce la Tierra sobre un cuerpo es proporcional a la masa de éste. ¿Por qué no caen más deprisa los cuerpos con mayor masa?

Solución: "La fuerza de atracción gravitatoria entre dos cuerpos es directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa”. Para comentar el significado físico de las magnitudes pongamos la ley en forma matemática:

$$F_G = \frac{G \cdot M \cdot m}{r^2}$$

M y m: las masas de los cuerpos que se atraen. Evidentemente cuanto mayores son dichas masas mayor es la fuerza de atracción. Otra magnitud que interviene es la r, que aparece en el denominador y que representa la distancia a la que se encuentra una masa de otra. A menor distancia entre las masas mayor será la fuerza de atracción entre ellas; y como está al cuadrado, su influencia en la atracción será más importante que la de cualquiera de las masas. Por último aparece la constante de proporcionalidad G, que es la denominada constante de gravitación universal, cuyo valor, determinado experimentalmente por Cavendish, no depende del medio en el que se encuentren las masas, y vale $6'67 \cdot 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2}$, muy pequeño, por lo que la atracción gravitatoria entre cuerpos solo se pone de manifiesto si estos son muy masivos.

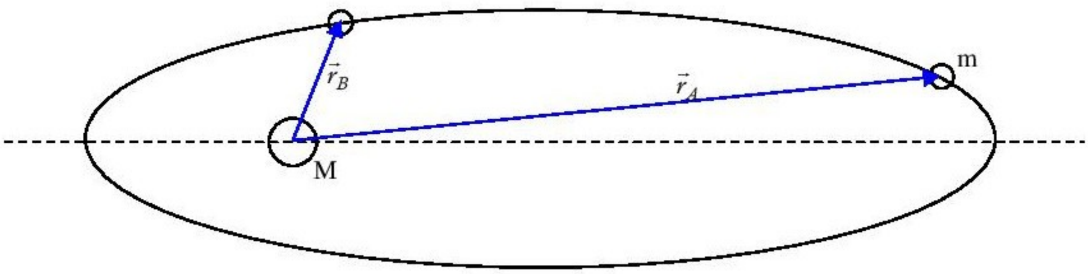
b) Porque el que caigan más o menos deprisa los cuerpos es el efecto de esa fuerza de atracción. Es decir, según la segunda ley de Newton, la fuerza que la Tierra ejerce sobre un cuerpo (en ausencia del resto de interacciones) es igual al producto de la masa del cuerpo por la aceleración que adquiere este. La aceleración (el que caigan más o menos rápido), por tanto, es el efecto de esa fuerza, así que si utilizamos las expresiones de Newton de la ley de gravitación universal y su segunda ley de la dinámica tenemos:

$$a = \frac{F}{m} = \frac{\frac{G \cdot M_T \cdot m}{R_T^2}}{m} = \frac{G \cdot M_T}{R_T^2} = g$$

que como vemos solo depende de la masa de la Tierra y de la distancia de la Tierra al cuerpo que cae, y esto es lo mismo para todos los cuerpos que caen en la Tierra, con lo que todos caen con la misma rapidez.

5) Sean A y B dos puntos de la órbita elíptica de un cometa alrededor del Sol, estando A más alejado del Sol que B. a) Haga un análisis energético del movimiento del cometa y comparar los valores de las energías cinética y potencial en A y en B. b) ¿En cuál de los puntos A o B es mayor el módulo de la velocidad? ¿Y el de la aceleración?

Solución:



a) En el punto A, más alejado, el cometa dispone de una energía potencia, como corresponde a su posición respecto al Sol. Al hallarse en su posición alejada, su energía potencial será:

$Ep = -\dfrac{G \cdot M \cdot m}{r_A}$. Por otro lado, posee una velocidad orbital, y, por tanto, una energía cinética asociada, de valor: $Ec = \dfrac{1}{2} m \cdot v_A^2$. La energía mecánica en este punto será:

$E_{MA} = Ec_A + Ep_A = \dfrac{1}{2} m \cdot v_A^2 - \dfrac{G \cdot M \cdot m}{r_A}$. Más tarde, cuando se halla en el punto B, poseerá un valor de energía potencial diferente, menor que el correspondiente al punto A (recordemos que Ep en el infinito adopta el valor máximo, cero). Desde luego, el cometa dispondrá también de un cierto nivel de energía cinética. Por lo tanto:

$$E_{MB} = Ec_B + Ep_B = \frac{1}{2} m \cdot v_B^2 - \frac{G \cdot M \cdot m}{r_B}$$

Considerando nos hallamos ante un sistema conservativo, podemos afirmar que la energía mecánica del sistema se mantendrá constante. Luego:

$$E_{MA} = E_{MB} \rightarrow \frac{1}{2} m \cdot v_A^2 - \frac{G \cdot M \cdot m}{r_A} = \frac{1}{2} m \cdot v_B^2 - \frac{G \cdot M \cdot m}{r_B}$$

Como ya se ha comentado, la energía potencial en al punto más próximo al Sol será menor. Consecuentemente, la energía cinética deberá ser mayor, puesto que sólo así podrá mantenerse constante el valor de la energía mecánica.

$$\frac{G \cdot M \cdot m}{r_B} - \frac{G \cdot M \cdot m}{r_A} = \frac{1}{2} m \cdot v_B^2 - \frac{1}{2} m \cdot v_A^2 \rightarrow -\Delta Ep = \Delta Ec$$

b) Ya hemos demostrado que la velocidad será mayor cuanto más próximo se encuentre el cometa del Sol. La velocidad máxima del cometa se producirá a su paso por el perihelio (punto más cercano); y de igual modo, el valor mínimo de velocidad orbital se producirá en el afelio (punto más alejado).

En cuanto a las aceleraciones, nos fijaremos en el valor de la intensidad del campo gravitatorio (**g**):

$\mathbf{g} = -\dfrac{G \cdot M_S}{R^2_{SC}} \cdot \mathbf{u_R}$, y su valor sería menor cuanto más alejado se encuentre el cometa del Sol. Otro modo de analizar las aceleraciones se realizaría a partir del concepto de aceleración centrípeta o normal:

$a_C = \dfrac{v^2}{R}$. Si $v_A < v_B$ y $R_A > R_B \rightarrow a_{CA} < a_{CB}$

6) Razone las repuestas a las siguientes preguntas: a) Si el cero de energía potencial gravitatoria de una partícula de masa **m** si sitúa en la superficie de la Tierra, ¿cuál es el valor de la energía potencial de la partícula cuando ésta se encuentra a una distancia infinita de la Tierra. b) ¿Puede ser negativo el trabajo realizado por una fuerza gravitatoria? ¿puede ser negativa la energía potencial?
Solución: a) La energía potencial gravitatoria está relacionada con el trabajo que realiza el campo gravitatorio cuando desplaza una partícula m de un punto a otro de tal forma que:
W = - ΔEp_G . De tal forma que lo que importa realmente es la variación que sufre dicha energía. El valor de la Ep_G en un punto es arbitrario, de tal forma que podemos elegir como cero el punto que deseemos. Una vez elegido el nivel cero, la expresión de la Ep_G en otro punto vendrá dada en función del trabajo que realiza el campo gravitatorio.
Vamos a calcular el trabajo que realiza el campo gravitatorio cuando desplaza una masa m desde la superficie de la Tierra hasta el infinito:

$$W = \int_{R_T}^{\infty} F \cdot dr = \int_{R_T}^{\infty} \frac{-G \cdot M_T \cdot m}{r^2} \cdot \mathbf{u} \cdot d\mathbf{r} = \int_{R_T}^{\infty} \frac{-G \cdot M_T \cdot m}{r^2} dr = -G \cdot M_T \cdot m \int_{R_T}^{\infty} \frac{dr}{r^2} =$$

$$= -\frac{G \cdot M_T \cdot m}{R_T}$$

Ahora bien, este trabajo es igual a la variación negativa de la energía potencial gravitatoria entre los dos puntos, luego:

$$-\frac{G \cdot M_T \cdot m}{R_T} = -\Delta Ep = -(Ep_\infty - Ep_{superficie}) = Ep_{superficie} - Ep_\infty$$

Si consideramos ahora como cero el valor de la $Ep_{superficie}$, entonces el valor de la energía potencial gravitatoria a una distancia infinita será:

$$-\frac{G \cdot M_T \cdot m}{R_T} = -Ep_\infty \quad \rightarrow \quad Ep_\infty = \frac{G \cdot M_T \cdot m}{R_T}$$

b) Si la masa se desplaza alejándose del cuerpo que ejerce la atracción gravitatoria ejemplo, la Tierra), el trabajo que realiza la fuerza gravitatoria es negativo. Este es el caso, por ejemplo, de un cuerpo que asciende alejándose del centro de la Tierra. La energía potencial gravitatoria puede ser negativa, todo depende de dónde se sitúe el nivel cero de energía potencial gravitatoria. Por ejemplo, si el nivel cero se sitúa en el infinito, la expresión de la energía potencial gravitatoria en cualquier otro punto viene dada por:
$Ep(r) = -\frac{G \cdot M_T \cdot m}{r}$ Y, por lo tanto, su valor es negativo.

7) Dos satélites idénticos A y B se encuentran en órbitas circulares de diferente radio ($R_A > R_B$) alrededor de la Tierra. Conteste razonadamente a las siguientes preguntas: a) Si los dos satélites estuvieran en la misma órbita ($R_A = R_B$) y tuviesen distinta masa ($m_A < m_B$), ¿cuál de los dos se movería con mayor velocidad? ¿cuál de ellos tendría más energía cinética?
Solución: la energía cinética es: Ec = $\frac{1}{2}$ m v², donde v es la velocidad orbital del satélite en cuestión.

Como la velocidad orbital de un satélite a una distancia r del centro de la Tierra es:

$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$, tenemos para la energía cinética de un satélite esta expresión:

$Ec = \frac{1}{2} \cdot \frac{G \cdot M \cdot m}{r}$, que para cada uno de los satélites será:

$Ec_A = \frac{1}{2} \cdot \frac{G \cdot M \cdot m}{r_A}$; $Ec_B = \frac{1}{2} \cdot \frac{G \cdot M \cdot m}{r_B}$, ya que las masas de ambos satélites son iguales.

Si $R_A > R_B$, es evidente que: $Ec_A < Ec_B$, ya que las otras magnitudes son iguales en ambos casos. Por lo tanto, el satélite B tiene más energía cinética que A.

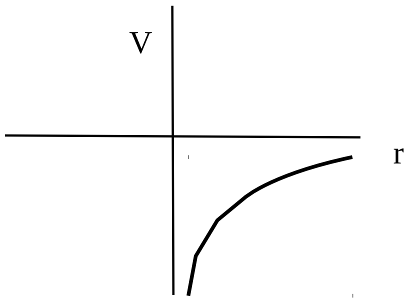
b) La velocidad a que se refiere es la velocidad orbital, que como ya he expresado es:

$v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$ y como sólo depende de la masa del planeta en torno al que gira el satélite, y del radio de la órbita, al ser estas magnitudes iguales para ambos satélites, las velocidades son iguales. Ahora bien, como la energía cinética depende además de la masa del objeto que se mueve y el satélite B es más masivo que el A tendrá también más energía cinética: $Ec_B > Ec_A$.

8) Una partícula de masa m, situada en un punto A, se mueve en línea recta hacia otro punto B, en una región en la que existe un campo gravitatorio creado por una masa M. a) Si el valor del potencial gravitatorio en el punto B es menor que en el punto A, razone si la partícula se acerca o se aleja de M. b) Explique las transformaciones energéticas de la partícula durante el desplazamiento indicado y escribir su expresión. ¿Qué cambios cabría esperar si la partícula fuera de A a B siguiendo una trayectoria no rectilínea?

Solución: a) Potencial gravitatorio (V): energía almacenada por unidad de masa que se coloque en un punto del campo gravitatorio. El potencial gravitatorio creado por una masa puntual M tiene la expresión (eligiendo el origen para $r \to \infty$): $V = -\frac{G \cdot M}{r}$

En la gráfica podemos ver que el potencial aumenta con la distancia a la masa M. Por lo tanto, si el potencial es mayor en S que en A, el punto S está más alejado de M que A. La partícula se aleja.

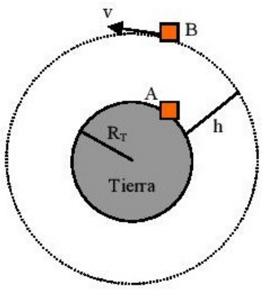


La única fuerza que actúa en esta cuestión es la gravitatoria, que es conservativa. Por tanto, las energías presentes son:

- Energía potencial gravitatoria, debida a la acción de la fuerza gravitatoria: $Ep_G = m \cdot V$. Varía de la misma forma que el potencial gravitatorio, por lo que aumenta desde A hasta S. $\Delta Ep_G = - W_{FG}$
- Energía cinética, debida al movimiento: disminuye conforme se aleja. Se cumple que: $\Delta Ec = - \Delta Ep_G$
- Energía mecánica ($E_M = Ec + Ep_G$): se mantiene constante, debido a que la fuerza gravitatoria es conservativa. Si la trayectoria no fuera rectilínea no cabe esperar ningún cambio, ya que el trabajo de la fuerza gravitatoria (conservativa) es independiente del camino realizado. Sólo depende de los puntos inicial y final.

9) Se desea colocar un satélite en una órbita circular, a una cierta altura sobre la Tierra. a) Explique las variaciones energéticas del satélite desde su lanzamiento hasta su situación orbital. b) ¿Influye la masa del satélite en su velocidad orbital?

Solución: El satélite se encuentra inicialmente en reposo en la superficie de la Tierra, situación A de la figura:



En esta posición, la energía total del satélite será solo energía potencial gravitatoria, ya que está en reposo antes del lanzamiento, cuya expresión será:

$$E_{TA} = Ep_A = -\frac{G \cdot M_T \cdot m_S}{R_T}$$

Una vez en órbita, posición B de la figura, el satélite poseerá energía potencial gravitatoria y energía cinética puesto que está orbitando con una velocidad v determinada. Las energías en esta posición orbital serán:

$$Ep_B = -\frac{G \cdot M_T \cdot m_S}{R_T + h} \quad ; \quad Ec_B = \frac{1}{2}\, m \cdot v^2$$

Ahora bien, la velocidad orbital del satélite viene dada por: $v = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{R_T + h}}$

Luego la energía cinética en B será: $Ec_B = \frac{1}{2} \cdot \frac{G \cdot M_T \cdot m_s}{R_T + h}$

Y la energía total en la posición B, suma de la potencial y la cinética será:

$$E_{TB} = Ec_B + Ep_B = \frac{1}{2} \cdot \frac{G \cdot M_T \cdot m_s}{R_T + h} - \frac{G \cdot M_T \cdot m_S}{R_T + h} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{G \cdot M_T \cdot m_s}{R_T + h}$$

Luego el satélite sufre variación de energía cinética y variación de energía potencial gravitatoria, de tal manera que la variación total de energía que experimentará será:

$$\Delta E = E_{TB} - E_{TA} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{G \cdot M_T \cdot m_s}{R_T + h} + \frac{G \cdot M_T \cdot m_S}{R_T}$$

Esta variación de energía es la que tendrá que suministrar el cohete lanzador del satélite para poder ponerlo en órbita.

b) Como hemos visto antes la velocidad orbital del satélite a una altura h viene dada por la expresión: $v = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{R_T + h}}$. Donde se puede apreciar que esta velocidad no depende para nada de la masa del satélite sino de la masa de la Tierra y de la distancia al centro de la misma que queramos que orbite el satélite.

10) Una masa m se mueve en un campo gravitatorio producido por otra masa M. a) ¿Aumenta o disminuye su energía potencial cuando se acercan las dos partículas? b) Si inicialmente m estaba a una distancia r de M y se traslada hasta una distancia 2r, explique las variaciones de su energía cinética y potencial.
Solución: a) La energía potencial gravitatoria se define como la energía necesaria para acercar dos masas desde el infinito hasta una distancia r. Su valor es: $Ep = -\frac{G \cdot M \cdot m}{r}$. Su valor es cero en el infinito y negativo en los demás casos. Por consiguiente, cuando se acercan las masas, su energía potencial disminuye. Esta es la tendencia espontánea, pues la fuerza gravitatoria tiende a acercar, es siempre atractiva. Para alejarlas, habría que hacer un trabajo contra el sistema.
b)

$$\Delta Ep = Ep_2 - Ep_1 = -\frac{G \cdot M \cdot m}{2 \cdot r} + \frac{G \cdot M \cdot m}{r} = \frac{G \cdot M \cdot m}{r} \cdot \left(\frac{-1}{2}+1\right) = \frac{G \cdot M \cdot m}{2 \cdot r}$$

$$\Delta Ec = Ec_2 - Ec_1 = \frac{G \cdot M \cdot m}{2 \cdot r_2} - \frac{G \cdot M \cdot m}{2 \cdot r_1} = \frac{G \cdot M \cdot m}{2 \cdot 2 \cdot r} - \frac{G \cdot M \cdot m}{2 \cdot r} =$$

$$= \frac{G \cdot M \cdot m}{r} \cdot \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right) = -\frac{G \cdot M \cdot m}{4 \cdot r}$$

Es decir, la energía cinética disminuye y la energía potencial aumenta el doble.

11) ¿Por qué la energía potencial gravitatoria de un planeta aumenta cuando se aleja del Sol?
Solución: teniendo en cuenta la fórmula de la energía potencial gravitatoria asociada al sistema Sol-planeta es: $Ep = -\frac{G \cdot M_S \cdot m}{r}$, podemos deducir que a medida que crece r, el valor de Ep se hace un número menos negativo. Por tanto, Ep se hace mayor cuando r crece. Cuando $r = \infty$, Ep tiene su valor máximo, cero.

12) Comente los siguientes enunciados, definiendo los conceptos físicos asociados y justificar su carácter de verdadero o falso: a) El campo gravitatorio es conservativo y por tanto existe un potencial asociado a él. b) El trabajo realizado por el campo gravitatorio sobre una partícula que se desplaza entre dos puntos es menor si lo hace a través de la recta que une dichos puntos, ya que es el camino más corto.
Solución: a) Verdadero. El potencial gravitatorio es la energía potencial por unidad de masa asociada a un punto del espacio, sometido a la presión de fuerzas gravitatorias. b) Falso. Una de las características de las fuerzas conservativas es que el trabajo que realizan sólo depende de las posiciones inicial y final y no de la trayectoria seguida.

13) Suponga que la Tierra redujese su radio a la mitad manteniendo su masa. a) ¿Aumentaría la intensidad del campo gravitatorio en su nueva superficie? b) ¿Se modificaría sustancialmente su órbita alrededor del Sol? Justifique las respuestas.

Solución: a) La intensidad del campo gravitatorio es: $\mathbf{g} = \frac{G \cdot M}{r^2} \cdot \mathbf{u_r}$ .Si el radio se redujese a la mitad, el nuevo campo gravitatorio sería: $g' = \frac{G \cdot M}{(r/2)^2} \cdot \mathbf{u_r} = 4 \cdot \frac{G \cdot M}{r^2} \cdot \mathbf{u_r} = 4\,\mathbf{g}$

Por tanto, aumentaría cuatro veces. b) La fuerza de atracción entre la Tierra y el Sol no se vería afectada, pues depende de los siguientes factores: $F_G = \frac{G \cdot M_S \cdot M_T}{r^2}$. El único cambio provendría de la variación del momento de inercia de la Tierra, que afectaría muy poco a su movimiento de rotación.

14) Dos satélites idénticos están en órbita alrededor de la Tierra, siendo sus órbitas de distinto radio. a) ¿Cuál de los dos se moverá a mayor velocidad? b) ¿Cuál de los dos tendrá mayor energía mecánica? Razone las respuestas.

Solución: la velocidad orbital de un satélite que describe órbitas circulares en torno a un planeta viene dada por la expresión: $v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$, donde M es la masa del planeta, r el radio de la órbita y G la constante de gravitación universal. Para satélites que orbiten alrededor del mismo planeta, sólo depende de la distancia al centro del planeta. Vemos que si el satélite A está a mayor distancia (mayor radio), su velocidad orbital será menor. El B tendrá mayor velocidad orbital.

- La energía mecánica de un satélite en órbita es la suma de sus energías cinética y potencial gravitatoria:

$$E_M = Ec + Ep = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{G \cdot M \cdot m}{r} = \frac{1}{2} m \cdot \frac{G \cdot M}{r} - \frac{G \cdot M \cdot m}{r} = -\frac{G \cdot M \cdot m}{2r}$$

Al tratarse de una energía negativa, vemos que, a mayor radio del satélite, la energía mecánica será menos negativa, es decir, será mayor. Por tanto, el A posee mayor energía mecánica, al tener mayor radio.

15) a) Explique las analogías y diferencias entre las interacciones gravitatoria y electrostática. b) ¿Qué relación existe entre el período y el radio orbital de dos satélites?

Solución: a)

Analogías	**Diferencias**
- Su expresión matemática es semejante. - Describen fuerzas que son proporcionales a la magnitud física que interacciona, las masas en las fuerzas gravitatorias y las cargas en las eléctricas. - En ambas leyes las fuerzas son inversamente proporcionales al cuadrado de la distancia. - Tanto las fuerzas gravitatorias como las eléctricas son fuerzas centrales, es decir, actúan en la dirección de la recta que une las masas o las cargas, respectivamente.	- La fuerza gravitatoria está asociada a la más y la fuerza eléctrica a la carga. - La fuerza gravitatoria es de atracción (porque solo hay un tipo de masa) y la fuerza eléctrica puede ser de atracción o de repulsión (porque hay dos tipos de cargas). - El valor de la constante G no depende del medio mientras que el valor de la constante K depende del medio en el que estén las cargas. - El valor de G es muy pequeño frente a K: la interacción gravitatoria es mucho más débil que la eléctrica.

b) La tercera Ley de Kepler indica la relación que existe para un satélite entre su periodo y su radio.

La deducimos: $F_C = F_G \rightarrow \frac{m \cdot v^2}{r} = \frac{G \cdot M \cdot m}{r^2} \rightarrow v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}}$

$$T = \frac{2 \cdot \pi \cdot r}{v} \rightarrow T^2 = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r^2}{\frac{G \cdot M}{r}} \rightarrow T^2 = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r^3}{G \cdot M}$$

Si lo que tenemos que comparar son los periodos de dos satélites, tendremos:

$$\left.\begin{array}{l} T_1^2 = K \cdot r_1^3 \\ T_2^2 = K \cdot r_2^3 \end{array}\right\}. \rightarrow \frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{K \cdot r_1^3}{K \cdot r_2^3} \rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot \sqrt{\frac{r_1}{r_2}}$$

16) Demuestre, razonadamente, las siguientes afirmaciones: a) a una órbita de radio **R** de un satélite le corresponde una velocidad orbital **v** característica; b) la masa **M** de un planeta puede calcularse a partir de la masa **m** y del radio orbital **R** de uno de sus satélites.

Solución: a) Los fundamentos teóricos que explican el movimiento de satélites artificiales en sus órbitas estables pueden ser desarrollados cosiderando estos principios físicos: Ley de la Gravitación Universal, Conservación del Momento Angular y Conservación de la Energía. La energía mecánica que posee un satélite que gira alrededor del planeta será:

$E_M = Ec + Ep = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{G \cdot M_T \cdot m}{r}$ = constante. Este valor deberá ser negativo en todo momento, puesto que el segundo término se relaciona con la acción gravitatoria del satélite, y para que el artefacto permanezca constantemente ligado al planeta es necesario que la energía cinética sea menor, en términos absolutos, que la energía potencial correspondiente al punto de la órbita en la que se encuentre dicho satélite (de este modo, no dispondrá en ningún momento de la energía suficiente como para escapar de la acción de planeta):

$\left|\frac{-G \cdot M_T \cdot m}{r}\right| > \frac{1}{2} m v^2$. Esta condición se cumplirá entre determinados valores de r, uno máximo (apogeo) y otro mínimo (perigeo). La trayectoria que cumplirá esta condición será, claro está, una elipse con la Tierra en uno de sus focos, según la primera ley de Kepler. Y, claro está, una de las elipses que cumplen lo deducido anteriormente es, precisamente, la circunferencia. Al analizar este sencillo caso: $\mathbf{F_G} = m \cdot \mathbf{a_C}$. Al tener los dos vectores iguales dirección y sentido, podemos realizar un tratamiento escalar. Así :

$$\frac{G \cdot M_T \cdot m}{r^2} = m \cdot \frac{v^2_{orbital}}{r} \rightarrow \frac{G \cdot M_T}{r} = v^2_{orbital} \rightarrow v_{orbital} = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{r}}$$

b) Tal determinación será posible siempre que se conozcan datos de un planeta o satélite en órbita alrededor suyo. Considerando las órbitas como circulares, la fuerza de atracción gravitatoria es la fuerza centrípeta productora del movimiento. Entonces:

$$F_C = F_G \rightarrow \frac{m \cdot v^2}{r} = \frac{G \cdot M \cdot m}{r^2} \rightarrow v^2 = \frac{G \cdot M}{r} \rightarrow M = \frac{r \cdot v^2}{G}$$

Como: v = ω · r = $\frac{2\cdot\pi\pi\cdot}{T}$ → M = $\frac{r\cdot\frac{4\cdot\pi^2\cdot r^2}{T^2}}{G}$ = $\frac{4\cdot\pi^2\cdot r^3}{G\cdot T^2}$

17) a) Enuncie la ley de gravitación universal y comente el significado físico de las magnitudes que intervienen en ella. b) Según la ley de gravitación universal, la fuerza que ejerce la Tierra sobre un cuerpo es proporcional a la masa de éste. ¿Por qué no caen más deprisa los cuerpos con mayor masa?
Solución: "La fuerza de atracción gravitatoria entre dos cuerpos es directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa". Para comentar el significado físico de las magnitudes pongamos la ley en forma matemática:

F_G = G · $\frac{M\cdot m}{r^2}$. Así, M y m son las masas de los cuerpos que se atraen. Evidentemente cuanto mayores son dichas masas, mayor es la fuerza de atracción. Otra magnitud que interviene es la r, que aparece en el denominador y que representa la distancia a la que se encuentra una masa de otra. A menor distancia entre las masas, mayor será la fuerza de atracción entre ellas; y como está al cuadrado, su influencia en la atracción será más importante que la de cualquiera de las masas. Por último aparece la constante de proporcionalidad G, que es la denominada constante de gravitación universal, cuyo valor, determinado experimentalmente por Cavendish, no depende del medio en el que se encuentren las masas, y vale 6'67 · 10^{-11} $\frac{N\cdot m^2}{kg^2}$, muy pequeño, por lo que la atracción gravitatoria entre cuerpos solo se pone de manifiesto si estos son muy masivos.
b) Porque el que caigan más o menos deprisa los cuerpos es el efecto de esa fuerza de atracción. Es decir, según la segunda ley de Newton, la fuerza que la Tierra ejerce sobre un cuerpo (en ausencia del resto de interacciones) es igual al producto de la masa del cuerpo por la aceleración que adquiere este. La aceleración (el que caigan más o menos rápido), por tanto, es el efecto de esa fuerza, así que si utilizamos las expresiones de Newton de la ley de gravitación universal y su segunda ley de la dinámica tenemos:

a = $\frac{F}{m}$ = $\frac{\frac{G\cdot M_T\cdot m}{r^2}}{m}$ = $\frac{G\cdot M_T}{r^2}$ = g . Es decir, todos los cuerpos cercanos a la Tierra caerán

con la aceleración g (10 m/s²), independientemente de sus masas.

18) Un satélite artificial describe una órbita circular alrededor de la Tierra. a) Explique qué se entiende por velocidad orbital y deduzca razonadamente su expresión. b) Conociendo el radio de la órbita y su período, ¿podemos determinar las masas de la Tierra y del satélite? Razone la respuesta.
Solución: a) La velocidad orbital de un satélite, es aquella que debe tener para que su órbita sea estable y ha de cumplirse que la fuerza gravitatoria que le ejerce la Tierra sea la fuerza centrípeta:

$F_G = F_C$ → $\frac{G\cdot M_T\cdot m}{r^2}$ = m · $\frac{v^2_{orbital}}{r}$ → $\frac{G\cdot M_T}{r}$ = $v^2_{orbital}$ → $v_{orbital}$ = $\sqrt{\frac{G\cdot M_T}{r}}$

b) Teniendo en cuenta que los datos orbitales del satélite son, su periodo (T) y el radio de la órbita (r). Aplicando $F_C = F_G$:

$$\frac{m \cdot v^2}{r} = \frac{G \cdot M_T \cdot m}{r^2} \quad \rightarrow \quad v^2 = \frac{G \cdot M_T}{r} \quad \rightarrow \quad M_T = \frac{r \cdot v^2}{G}$$

Como: $v = \omega \cdot r = \frac{2 \cdot \pi \pi \cdot}{T} \quad \rightarrow \quad M_T = \frac{r \cdot \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r^2}{T^2}}{G} = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r^3}{G \cdot T^2}$

Así obtenemos la masa de la Tierra en función de la constante G y de los datos proporcionados: r y T. Sin embargo, no podemos conocer la masa del satélite, pues los datos orbitales no dependen de él.

19) a) Haciendo uso de consideraciones energéticas, determine la velocidad mínima que habría que imprimirle a un objeto de masa **m**, situado en la superficie de un planeta de masa **M** y radio **R**, para que saliera de la influencia del campo gravitatorio del planeta. b) Se desea que un satélite se encuentre en una órbita geoestacionaria. ¿Con qué período de revolución y a qué altura debe hacerlo?

Solución: a) Que un cuerpo salga de la influencia del campo gravitatorio del planeta significa que llegue a una distancia infinita (Ep = 0) y que su velocidad sea cero (Ec = 0), por lo tanto su energía mecánica sería cero. A la velocidad necesaria que hay que darle al cuerpo en la superficie del planeta para que eso ocurra se le llama velocidad de escape. Se necesita una fuerza instantánea que le comunique esa velocidad inicial. Por ejemplo, en una explosión. Como el campo gravitatorio es conservativo, la energía mecánica se mantiene constante, en consecuencia, podemos plantear la siguiente ecuación:

$$E_M = E_{M superficie} = E_{M\infty} = Ec_{superficie} + Ep_{superficie} = E_{c\infty} + E_{p\infty} \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad \frac{1}{2} m\, v_e^2 - \frac{G \cdot M \cdot m}{R} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2} m\, v_e^2 = \frac{G \cdot M \cdot m}{R} \quad \rightarrow \quad v_e = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M}{R}}$$

b) Un satélite geoestacionario se caracteriza por estar situado en todo momento sobre el mismo punto del planeta. Ésto se consigue si su periodo de rotación es el mismo del planeta sobre el que orbita (en el caso de la Tierra el periodo de rotación del satélite sería de 24 h). Para calcular la altura de la órbita partimos de la tercera ley de Kepler: $T^2 = k \cdot r^3$. Sustituyendo k por su valor:

$T^2 = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r^3}{G \cdot M_T}$. Despejamos r: $r = \sqrt[3]{\frac{T^2 \cdot G \cdot M_T}{4 \cdot \pi^2}}$ y como: $r = R_T + h$:

$$h = \sqrt[3]{\frac{T^2 \cdot G \cdot M_T}{4 \cdot \pi^2}} - R_T$$

20) Un satélite está en órbita circular alrededor de la Tierra. Razone si la energía potencial, la energía cinética y la energía total del satélite son mayor, menor o igual que las de otro satélite que sigue una órbita, también circular, pero de menor radio.

Solución: estas son las expresiones de las tres energías para cualquier satélite:

Ep = $-\frac{G \cdot M_T \cdot m}{r}$; Ec = $\frac{1}{2}$ m v² . Como la velocidad orbital es: v = $\sqrt{\frac{G \cdot M_T}{r}}$ →

→ Ec = $\frac{1}{2}$ m · $\frac{G \cdot M_T}{r}$ = $\frac{G \cdot M_T \cdot m}{2 \cdot r}$; E_M = Ec + Ep = $\frac{G \cdot M_T \cdot m}{2 \cdot r}$ - $\frac{G \cdot M_T \cdot m}{r}$ =

= $-\frac{G \cdot M_T \cdot m}{2 \cdot r}$

Supongamos que $r_A > r_B$. Como la Ec es inversamente proporcional a r, a mayor r, menor Ec. Luego: $Ec_A < Ec_B$.
La Ep también es inversamente proporcional a r, pero su expresión tiene signo negativo. Eso significa que, a mayor r, Ep se hace menos negativo, o sea, más grande. Luego: $Ep_B > Ep_A$.
Como la EM también tiene signo negativo y es también inversamente proporcional a r, por el mismo razonamiento que con la Ep, $E_{MB} > E_{MA}$.

21) a) La energía potencial de un cuerpo de masa m en el campo gravitatorio producido por otro cuerpo de masa m' depende de la distancia entre ambos. ¿Aumenta o disminuye dicha energía potencial al alejar los dos cuerpos? ¿Por qué? b) ¿Qué mide la variación de energía potencial del cuerpo de masa m al desplazarse desde una posición A hasta otra B? Razone la respuesta.
Solución: a) la ecuación de la energía potencial para dos cuerpos de masas m y m’ separados una distancia r es la siguiente: Ep = $-\frac{G \cdot m \cdot m'}{r}$. Al separarlos, aumenta r y disminuye el valor absoluto de la energía potencial, pero como su signo es negativo, la energía potencial aumenta.
b) El trabajo realizado por las fuerzas conservativas del campo gravitatorio, equivale a la variación negativa de la energía potencial del sistema, pues las fuerzas conservativas son las únicas capaces de modificar el valor de la energía potencial: W_{FC} = Ep = $Ep_A - Ep_B$.

22) Razone la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones: a) El peso de un cuerpo en la superficie de un planeta cuya masa fuera la mitad que la de la Tierra sería la mitad de su peso en la superficie de la Tierra. b) El estado de "ingravidez" de los astronautas en el interior de las naves espaciales orbitando alrededor de la Tierra se debe a que la fuerza que ejerce la Tierra sobre ellos es nula.
Solución: a) $P_{Tierra} = \frac{G \cdot M_T}{R_T^2}$; $P_{Planeta} = \frac{G \cdot M_{planeta}}{R_T^2} = \frac{G \cdot M_T}{2 \cdot R_T^2}$

Dividiendo miembro a miembro: $\frac{P_{Planeta}}{P_{Tierra}} = \frac{\frac{G \cdot M_T}{2 \cdot R_T^2}}{\frac{G \cdot M_T}{R_T^2}} = \frac{1}{2}$

Verdadero. El peso en el planeta sería la mitad del peso en la Tierra.

b) Falso. La ingravidez es solo aparente, porque la gravedad existe. Lo que ocurre es que el satélite se mueve con una aceleración exactamente igual a la de la gravedad: Para un observador inercial: $g = a_{normal} = \frac{v^2}{r}$ y para un observador no inercial: $g = a_{centrífuga} = \frac{v^2}{r}$.
Por eso cuando un astronauta suelta un objeto permanece a la misma distancia del astronauta, dando la impresión de que no se mueve. Es exactamente el mismo caso que si viajamos en un ascensor y se parte la cuerda. Recordemos que un sistema inercial es aquel en reposo o con velocidad constante; en él, aparece la inercia. Un sistema no inercial es un sistema acelerado; en él, aparecen la fuerza centrífuga.

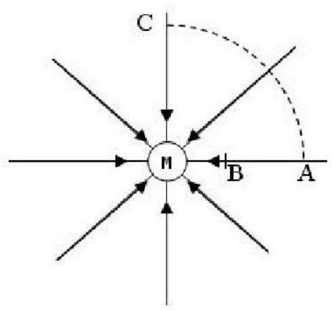
23) Un satélite describe una órbita circular alrededor de la Tierra. Conteste razonadamente a las siguientes preguntas: a) ¿Qué trabajo realiza la fuerza de atracción hacia la Tierra a lo largo de media órbita? b) Si la órbita fuera elíptica, ¿cuál sería el trabajo de esa fuerza a lo largo de una órbita.
Solución: a) Ninguno. Como se desprende de la expresión del potencial gravitatorio para cuerpos esféricos (la Tierra): $V = G \cdot \frac{M_T}{r}$, todos los puntos situados a la misma distancia r del centro de gravedad de la Tierra, tienen el mismo valor de potencial. Si unimos todos esos puntos mediante una superficie, esta será una “superficie equipotencial” que para el caso de la Tierra, toma la forma de una esfera. Una de las implicaciones del carácter conservativo de la fuerza gravitatoria, es que esta no realiza trabajo alguno sobre un cuerpo que se mueva por una superficie equipotencial (una órbita circular pertenece a una superficie equipotencial). Puesto que el potencial es el mismo no hay variación de energía potencial y en consecuencia, el trabajo es nulo.
En superficies equipotenciales: $W_{FC} = - \Delta Ep = 0$
b) Otra de las implicaciones de los campos conservativos es que no se produce trabajo en trayectorias cerradas. Al ser el mismo el punto inicial que el final, no hay variación de energía potencial y por lo tanto el trabajo es nulo.

24) a) Considere un punto situado a una determinada altura sobre la superficie terrestre. ¿Qué velocidad es mayor en ese punto, la orbital o la de escape? b) A medida que aumenta la distancia de un cuerpo a la superficie de la Tierra disminuye la fuerza con que es atraído por ella. ¿Significa eso que también disminuye su energía potencial? Razone las respuestas.
Solución: a) Las expresiones de ambas velocidades son:

$v_{escape} = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M}{R}}$; $v_{orbital} = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{r}}$. Luego: $v_{escape} = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M}{R}} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{r}} =$

$= \sqrt{2} \cdot v_{orbital}$. La velocidad de escape es $\sqrt{2}$ veces más grande que la velocidad orbital.
b) No. La expresión de la energía potencial es: $Ep = - \frac{G \cdot M_T}{R_T + h}$. Al aumentar h, disminuye el valor numérico de la energía potencial, pero al ser esta negativa, su valor real aumenta. La energía potencial aumenta al alejarnos de la Tierra, pues se hace menos negativa, hasta llegar a su valor máximo en el infinito: 0.

25) Dibuje en un esquema las líneas de fuerza del campo gravitatorio creado por una masa puntual M. Sean A y B dos puntos situados en la misma línea de fuerza del campo, siendo B el punto más cercano a M. a) Si una masa, m, está situada en A y se traslada a B, ¿aumenta o disminuye su energía potencial? ¿Por qué? b) Si una masa, m, está situada en A y se traslada a otro punto C, situado a la misma distancia de M que A, pero en otra línea de fuerza, ¿aumenta o disminuye la energía potencial? Razone su respuesta.
Solución: a)



Las energías potenciales correspondientes son: $Ep_A = -\dfrac{G \cdot M_T}{r_A}$; $Ep_B = -\dfrac{G \cdot M_T}{r_B}$.

Como la energía potencial tiene signo negativo y es inversamente proporcional a la distancia r, al ser $r_A > r_B$, entonces: $Ep_A > Ep_B$.
b) La energía potencial no varía porque el cuerpo se desplaza por una superficie equipotencial. Como se desprende de la expresión del potencial gravitatorio para cuerpos esféricos (la Tierra):
$V = G \cdot \dfrac{M_T}{r}$. Todos los puntos situados a la misma distancia r del centro de gravedad de la Tierra, tienen el mismo valor de potencial. Si unimos todos esos puntos mediante una superficie, esta será una “superficie equipotencial” que para el caso de la Tierra, toma la forma de una esfera. Una de las implicaciones del carácter conservativo de la fuerza gravitatoria, es que esta no realiza trabajo alguno sobre un cuerpo que se mueva por una superficie equipotencial (una órbita circular pertenece a una superficie equipotencial). Puesto que el potencial es el mismo no hay variación de energía potencial y en consecuencia, el trabajo es nulo.

26) Conteste razonadamente a las siguientes preguntas: a) Si se redujera el radio de la órbita lunar en torno a la Tierra, ¿aumentaría su velocidad orbital? b) ¿Dónde es mayor la velocidad de escape, en la Tierra o en la Luna?
Solución: a) La velocidad orbital de la Luna en torno a la Tierra se deduce de igualar la fuerza centrípeta a la gravitatoria:

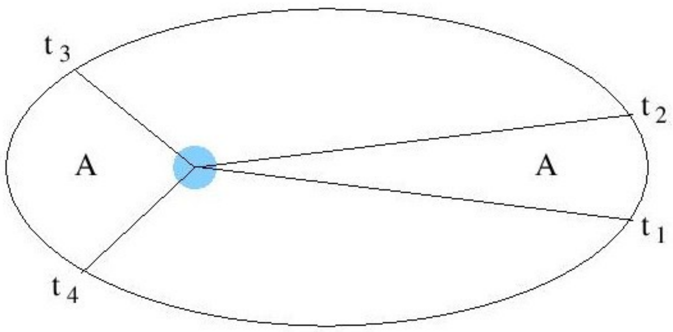
$$F_G = F_C \quad \rightarrow \quad \frac{G \cdot M_T \cdot m}{r^2} = m \cdot \frac{v^2_{orbital}}{r} \quad \rightarrow \quad \frac{G \cdot M_T}{r} = v^2_{orbital} \quad \rightarrow \quad v_{orbital} = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{r}}$$

La velocidad orbital es inversamente proporcional al radio de giro. Si disminuye el radio de la órbita (r) es evidente que aumenta la velocidad orbital.
b) La velocidad de escape es la velocidad inicial mínima que hay que imprimirle a un cuerpo desde la superficie de un planeta para que escape de su atracción gravitatoria. La velocidad de escape desde la superficie de un cuerpo celeste viene dada por varias expresiones. La que nos sirve para comparar en este caso es: $v_e = \sqrt{2 \cdot g \cdot r}$.

Particularizamos para la Tierra y la Luna: $v_{eT} = \sqrt{2 \cdot g_T \cdot R_T}$; $v_{eL} = \sqrt{2 \cdot g_L \cdot R_L}$
Como $g_T > g_L$ y $R_T > R_L$, entonces: $v_{eT} > v_{eL}$

27) Razone, a partir de la segunda ley de Kepler, cómo cambia la velocidad de un planeta a lo largo de su órbita al variar la distancia al Sol.

Solución:



La segunda ley de Kepler afirma que la velocidad areolar de un planeta es constante. Si llamamos A al área barrida por el segmento que une el Sol con el planeta, la ley se puede expresar matemáticamente así: $k = \frac{dA}{dt}$.

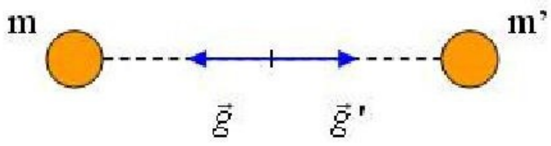
Como las áreas deben ser iguales y deben ser recorridas en el mismo tiempo: $t_2 - t_1 = t_4 - t_3$, es decir, que cuando el planeta está más alejado del Sol debe moverse más lento que cuando está más cerca, que debe ir más rápido para que el área A sea barrida en el mismo tiempo. Podemos concluir, por tanto, que en su movimiento alrededor del Sol un planeta se mueve más despacio cuanto más alejado está de él y va aumentando su velocidad a medida que se va acercando, para luego ir disminuyéndola de nuevo a medida que se aleja.

28) a) Explique las analogías y diferencias entre el campo eléctrico creado por una carga puntual y el campo gravitatorio creado por una masa puntual, en relación con su origen, intensidad relativa, dirección y sentido. b) ¿Puede anularse el campo gravitatorio y/o el campo eléctrico en un punto del segmento que une a dos partículas cargadas? Razone la respuesta.

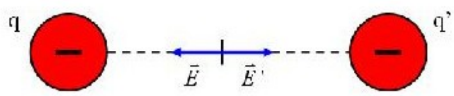
Solución: a) Analogías: Su expresión matemática es semejante. Describen fuerzas que son proporcionales a la magnitud física que interacciona, las masas en las fuerzas gravitatorias y las cargas en las eléctricas. En ambas leyes las fuerzas son inversamente proporcionales al cuadrado de la distancia. Tanto las fuerzas gravitatorias como las eléctricas son fuerzas centrales, es decir, actúan en la dirección de la recta que une las masas o las cargas, respectivamente. La fuerza gravitatoria está asociada a la masa y la fuerza eléctrica a la carga.

Diferencias: La fuerza gravitatoria es de atracción (porque solo hay un tipo de masa) y la fuerza eléctrica puede ser de atracción o de repulsión (porque hay dos tipos de cargas). El valor de la constante G no depende del medio mientras que el valor de la constante K depende del medio en el que estén las cargas. El valor de G es muy pequeño frente a K: la interacción gravitatoria es mucho más débil que la eléctrica.

b) El campo gravitatorio puede anularse, como se ve en la figura:

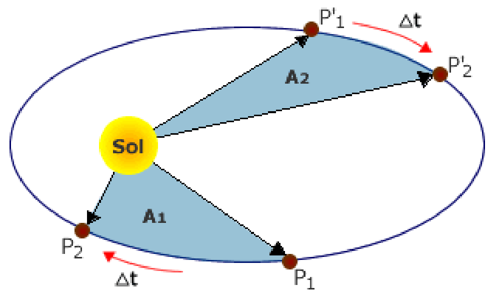


Para que se anule el campo eléctrico, las cargas han de ser de igual signo:



No es necesario que las cargas sean de igual módulo, ni que las masas sean iguales, ni que la distancia sea la mitad entre los cuerpos y las cargas. Lo que es necesario es que los campos sean iguales y de sentidos opuestos.

29) a) Enuncie las leyes de Kepler y razone si la velocidad de traslación de un planeta alrededor del Sol es la misma en cualquier punto de la órbita. b) Justifique si es verdadera o falsa la siguiente afirmación: “la gravedad en la superficie de Venus es el 90% de la gravedad en la superficie de la Tierra y, en consecuencia, si midiésemos en Venus la constante de gravitación universal, G, el valor obtenido sería el 90% del medido en la Tierra”.
Solución: a) Según la segunda ley de Kepler, las áreas de la figura han de ser iguales y han de ser recorridas en el mismo tiempo. Ello explica que los planetas se muevan más rápidamente en el perihelio (cerca del sol) que en el afelio (lejos del sol):



b) La afirmación es falsa. G, como su propio nombre indica, es una constante universal, es decir su valor es el mismo para todo el universo. La gravedad de Venus es menor que la de la Tierra por el valor de su masa y de su radio:

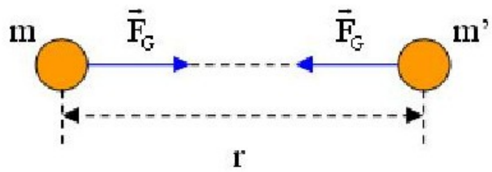
$$g_{Venus} = \frac{G \cdot M_V}{R^2_V} \quad ; \quad g_{Tierra} = \frac{G \cdot M_T}{R^2_T} \quad ; \quad \frac{M_V}{R^2_V} < \frac{M_T}{R^2_T}$$

30) a) Analice las características de la interacción gravitatoria entre dos masas puntuales. b) ¿Cómo se ve afectada la interacción gravitatoria descrita en el apartado anterior si en las proximidades de las dos masas se coloca una tercera masa, también puntual? Haga un esquema de las fuerzas gravitatorias que actúan sobre la tercera masa.

Solución: a) La interacción gravitatoria entre dos cuerpos es atractiva y puede expresarse mediante una fuerza central directamente proporcional al producto de las masas de los cuerpos e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que los separa. La constante de proporcionalidad es la llamada constante de gravitación universal, G , vectorialmente, expresamos esta fuerza de la siguiente manera:

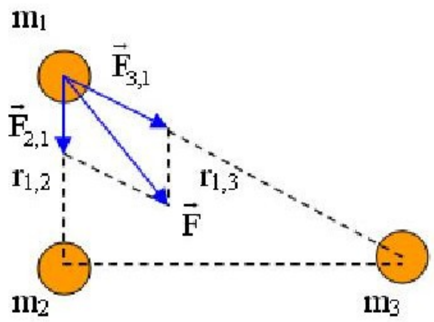
$$\mathbf{F_G} = G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2} \cdot \mathbf{u_r}$$

Es la ley de gravitación universal, desarrollada por Newton.



La fuerza que actúa sobre m es igual que la actúa sobre m', pero dirigida en sentido contrario.

b) Cuando tenemos un conjunto de varias masas, la fuerza que actúa sobre una de ellas es igual a la resultante de las fuerzas que las demás ejercen sobre ella, consideradas individualmente. Es el llamado principio de superposición:



$$\vec{F} = \vec{F}_{2,1} + \vec{F}_{3,1}$$

31) Se desea que un satélite se encuentre en una órbita geoestacionaria. Razone con qué período de revolución y a qué altura debe hacerlo.

Solución: un satélite geoestacionario se caracteriza por estar situado en todo momento sobre el mismo punto del planeta. Ésto se consigue si su periodo de rotación es el mismo del planeta sobre el que orbita (en el caso de la Tierra el periodo de rotación del satélite sería de 24 h). Para calcular la altura de la órbita:

$$F_G = F_C \quad \rightarrow \quad \frac{G \cdot M_T \cdot m}{r^2} = \frac{m \cdot v^2}{r} \quad \rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{r}} = \frac{2 \cdot \pi \pi \cdot}{T}$$

Elevando ambos miembros al cuadrado: $\frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r^2}{T^2} = \frac{G \cdot M_T}{r}$; $T^2 = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r^3}{G \cdot M_T} = k \cdot r^3$, que no es más que la tercera ley de Kepler.

Luego el radio de giro sería: r = $\sqrt[3]{\frac{T^2 \cdot G \cdot M_T}{4 \cdot \pi^2}}$.

Y teniendo en cuenta que: r = R_T + h → h = r - R_T = $\sqrt[3]{\frac{T^2 \cdot G \cdot M_T}{4 \cdot \pi^2}}$ - R_T

32) Suponiendo que la velocidad de lanzamiento de un cohete es inferior a la de escape, explique las características del movimiento del cohete y realice un balance de energías.
Solución: es evidente que el cohete no saldrá del campo gravitatorio terrestre. Durante la ascensión y mientras dure el combustible, la energía cinética que le provoca la combustión se transforma en energía potencial. Cuando el combustible se agota, su velocidad va disminuyendo hasta quedar parado (siempre que no tenga una componente tangencial de velocidad, en cuyo caso entraría en órbita) con la máxima energía potencial, en este momento comienza la caída hacia la superficie de la Tierra durante la cual, la energía potencial se transforma en cinética.

33) Se desea colocar un satélite en una órbita circular a una altura h sobre la Tierra. Deduzca las expresiones de la energía cinética del satélite en órbita y de la variación de su energía potencial respecto a la superficie de la Tierra.
Solución: en una órbita circular, el satélite tiene un movimiento circular uniforme, con velocidad de módulo constante denominada velocidad orbital, y que se obtiene con la expresión:
v = $\sqrt{\frac{G \cdot M_T}{r}}$ = $\sqrt{\frac{G \cdot M_T}{R_T + h}}$, donde M_T y R_T son la masa y el radio de la Tierra, respectivamente.

La energía cinética se calcula así: Ec = $\frac{1}{2}$ m v² = $\frac{1}{2}$ m · $\frac{G \cdot M_T}{R_T + h}$ = $\frac{G \cdot M_T \cdot m}{2 \cdot (R_T + h)}$

Al alejarse desde la superficie de la Tierra, la energía potencial del satélite aumenta debido a que la fuerza gravitatoria realiza un trabajo negativo sobre él. $\Delta Ep = - W_{FC}$ → $\Delta Ep > 0$. Suponiendo el nivel cero de energía potencial gravitatoria a una distancia infinita de la Tierra, la expresión de la energía potencial queda: Ep = - $\frac{G \cdot M_T \cdot m}{r}$

$Ep_1 = - \frac{G \cdot M_T \cdot m}{R_T}$; $Ep_2 = - \frac{G \cdot M_T \cdot m}{R_T + h}$;

$$\Delta Ep = Ep_2 - Ep_1 = - \frac{G \cdot M_T \cdot m}{R_T + h} + \frac{G \cdot M_T \cdot m}{R_T} = G \cdot M_T \cdot m \cdot \left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{R_T + h} \right) =$$

$$= G \cdot M_T \cdot m \cdot \left(\frac{R_T + h - R_T}{R_T \cdot (R_T + h)} \right) = \frac{G \cdot M_T \cdot m \cdot h}{R_T \cdot (R_T + h)}$$

34) Explique las variaciones energéticas de un objeto cuando se lanza desde la Tierra y alcanza una altura h sobre ella.
Solución: cuando decimos se lanza, suponemos que al cuerpo se le aplica una fuerza instantánea y se le comunica una velocidad inicial. En estas condiciones, no hay fuerzas conservativas, luego la energía mecánica se conserva:
$W_T = W_{FC} + W_{FNC} = - \Delta Ep + 0 = \Delta Ec$ → $- \Delta Ep = \Delta Ec$ → $Ec_A + Ep_A = Ec_B + Ep_B$

Es decir, la energía mecánica se conserva, transformándose la energía cinética en potencial. Si existiera rozamiento, la expresión sería: $W_{FC} + W_{ROZ} = -\Delta Ep + W_{ROZ} = \Delta Ec$
Esto significa que la energía cinética inicial se invierte en parte en aumentar la energía potencial y en parte en vencer el rozamiento con el aire. Una órbita geoestacionaria es aquella en la que el cuerpo gira alrededor de la Tierra sin escapar al espacio y sin caer a la superficie de la Tierra. Pueden ocurrir dos cosas tras el lanzamiento: que la Ec sea suficiente para alcanzar la órbita geoestacionaria o no. Si no tenía la energía cinética suficiente, el cuerpo volverá a caer a la superficie de la Tierra. En caso de llegar a la órbita geoestacionaria, el cuerpo giraría en torno a la Tierra en una órbita estable, en una trayectoria elíptica o circular, en una superficie equipotencial, es decir, el incremento de Ep sería nulo; sus energías cinética, potencial y mecánica serían constantes.

35) El radio orbital de un planeta es N veces mayor que el de la Tierra. Razone cuál es la relación entre sus periodos.
Solución: la tercera ley de Kepler dice que los cuadrados de los periodos de revolución de los planetas son proporcionales a los cubos de la distancia media de los planetas al sol: $T^2 = k \cdot r^3$
$T^2_{Tierra} = k \cdot r_T^3$; $T^2_{Planeta} = k \cdot r_P^3$. Dividiendo miembro a miembro:

$$\frac{T^2_{planeta}}{T^2_{Tierra}} = \frac{k \cdot r^3_{planeta}}{k \cdot r^3_{Tierra}} = \frac{k \cdot (N \cdot r_{Tierra})^3}{k \cdot r^3_{Tierra}} = N^3 \quad \rightarrow \quad T^2_{planeta} = N^3 \cdot T^2_{Tierra} \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad T_{planeta} = T_{Tierra} \cdot \sqrt{N^3}$$

36) Razone qué energía habría que comunicar a un objeto de masa m, situado a una altura h sobre la superficie de la Tierra, para que se alejara indefinidamente de ella.
Solución: antes de resolver este apartado, hemos de suponer dos cosas, primero, que el cuerpo inicialmente está parado con respecto a la Tierra (Ec = 0) a una altura h de su superficie, ya que el enunciado del problema no dice que esté en orbita, segundo, que el sentido de la frase “alejarlo indefinidamente” significa, sacarlo de la influencia de su campo gravitatorio, es decir, ponerlo en el infinito (Ep = 0) a velocidad cero (Ec = 0). La energía necesaria para alejar indefinidamente al objeto sería la diferencia de energía entre esas dos posiciones:

$$\Delta E = E_\infty - E_h = Ec_\infty + Ep_\infty - Ec_h - Ep_h = 0 + 0 - 0 - \left(\frac{-G \cdot M_T \cdot m}{R_T + h}\right) = \frac{G \cdot M_T \cdot m}{R_T + h}$$

37) Demuestre la tercera ley de Kepler a partir de la ley de gravitación universal de Newton para un órbita circular.
Solución: la tercera ley de Kepler dice que el cuadrado del período de revolución de un planeta es proporcional al cubo de su distancia de giro al Sol.

$$F_G = F_C \quad \rightarrow \quad \frac{G \cdot M_S \cdot m}{r^2} = \frac{m \cdot v^2}{r} \quad \rightarrow \quad v^2 = \frac{G \cdot M_S}{r}$$. Como la órbita es circular:

$$v = \frac{2 \cdot \pi \pi \cdot}{T} \quad \rightarrow \quad v^2 = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r^2}{T^2} = \frac{G \cdot M_S}{r} \quad \rightarrow \quad \rightarrow \quad T^2 = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r^3}{G \cdot M_S} = k \cdot r^3$$

38) Razone cómo variaría la energía mecánica de un satélite si se duplicara su masa.
Solución:

Ep = - $\frac{G \cdot M_T \cdot m}{r}$; Ec = $\frac{1}{2}$ m v² . Como la velocidad orbital es: v = $\sqrt{\frac{G \cdot M_T}{r}}$ →

→ Ec = $\frac{1}{2}$ m · $\frac{G \cdot M_T}{r}$ = $\frac{G \cdot M_T \cdot m}{2 \cdot r}$; E_M = Ec + Ep = $\frac{G \cdot M_T \cdot m}{2 \cdot r}$ - $\frac{G \cdot M_T \cdot m}{r}$ =

= - $\frac{G \cdot M_T \cdot m}{2 \cdot r}$

Si se duplicase la masa del satélite, se duplicaría su energía mecánica.

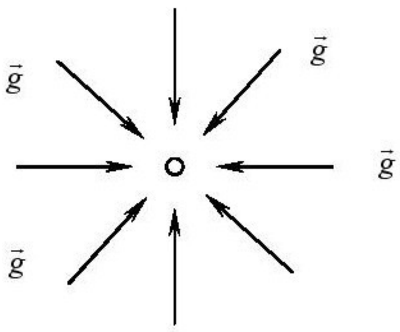
39) Explique en qué punto, entre dos masas puntuales, puede encontrarse en equilibrio una tercera masa puntual y cuál sería su energía potencial.
Solución: el punto entre dos masas puntuales en que puede encontrarse en equilibrio una tercera masa puntual es aquel en que las fuerzas gravitatorias que ejercen cada una de las masas sobre la tercera, que se encuentra entre ellas, son iguales y de sentido contrario con lo que se anulan entre ellas y la resultante es cero. La energía potencial de la tercera masa en ese punto sería mínima con respecto a la que tendría en cualquier otra posición del eje X ya que se encuentra en equilibrio.

40) Un cuerpo de masa m se eleva desde el suelo hasta una altura h de dos formas diferentes: directamente y mediante un plano inclinado. Razone que el trabajo de la fuerza peso es igual en ambos casos.
Solución: la fuerza gravitatoria (peso) es conservativa y por lo tanto se cumple que, como en ambos casos es la misma, la variación de energía potencial y por lo tanto el trabajo son iguales.
$W_{FC} = - \Delta Ep$. Dicho de otra forma: el trabajo realizado por fuerzas conservativas no depende del camino seguido, sólo de las posiciones inicial y final.

41) a) Relación entre campo y potencial gravitatorios.
b) Dibuje en un esquema las líneas del campo gravitatorio creado por una masa puntual M. Una masa m, situada en un punto A, se traslada hasta otro punto B, más próximo a M. Razone si aumenta o disminuye su energía potencial.
Solución: se define el campo gravitatorio que crea una masa M como la fuerza por unidad de masa con la que es capaz de atraer a cualquier otra masa m situada en el espacio que la rodea.

$$a = \frac{F_G}{m} = \frac{\frac{G \cdot M_T \cdot m}{r^2}}{m} = \frac{G \cdot M_T}{r^2} = g$$

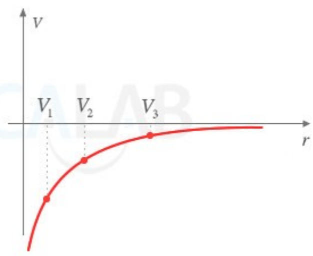
donde G es la constante de gravitación universal, M es la masa que crea el campo y r es la distancia a al que se quiere calcular el campo. Es una magnitud vectorial cuya unidad (m/s²) muestra que representa una aceleración que, en el caso de que M sea una masa puntual es radial y hacia dentro.



Se definen las líneas de campo como las líneas tangentes al campo gravitatorio en todos los puntos del espacio. Se define el potencial gravitatorio que crea una masa M como la energía potencial gravitatoria por unidad de masa que tendría una masa m en las proximidades de M:

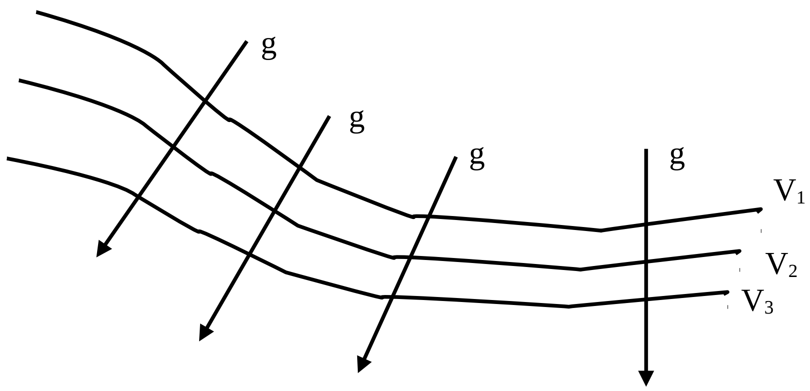
$$V = \frac{Ep}{m} = - \frac{\frac{G \cdot M_T \cdot m}{r}}{m} = - \frac{G \cdot M_T}{r}$$

La representación de V frente a la distancia es:



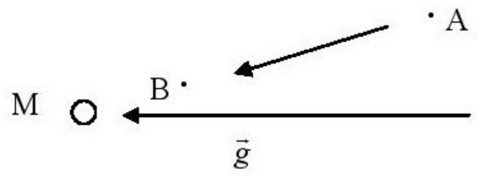
donde se puede ver cómo V siempre tiene un valor negativo y que para r $\to \infty$, V tiende a cero. Se definen las superficies equipotenciales como las regiones del espacio que están a potencial constante. La relación entre el campo y el potencial gravitatorios consiste en la expresión:

$g = \frac{dV}{dr}$, que indica que el valor del campo gravitatorio que crea una masa puntual es igual a la derivada del potencial respecto a la distancia en ese punto. En general se cumple que: las líneas de campo siempre son perpendiculares a las superficies equipotenciales; las líneas de campo siempre apuntan hacia potenciales decrecientes.



Siendo: $V_1 > V_2 > V_3$

b)



Como la masa m se acerca a M pasando del punto A al punto B, se tiene que las energías potenciales son: $Ep_A = m \cdot V_A$; $Ep_B = m \cdot V_B$

El potencial es: $V = -\frac{G \cdot M}{r}$

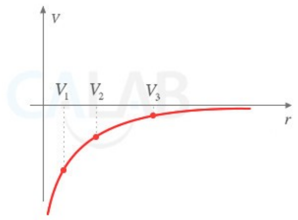
Al estar B más cerca de M que de A, se tiene que $R_B < R_A$, con lo que $V_B < V_A$, por lo que la masa m pierde energía potencial al pasar de A hasta B.

42) a) Explique brevemente el concepto de potencial gravitatorio. b) Discuta si es posible que existan puntos en los que se anule el campo gravitatorio y no lo haga el potencial en el caso de dos masas puntuales iguales separadas una distancia d.

Solución: a) Es una magnitud escalar que se define como el trabajo por unidad de masa que debe realizar una fuerza para transportar un cuerpo, a velocidad constante, desde el infinito hasta un punto del campo gravitatorio. Su unidad en el SI es el julio por kilogramo (J/kg).

Potencial creado por una masa puntual: $V = \frac{Ep}{m} = -\frac{G \cdot M}{r}$

Variación del potencial frente a la distancia:



En el infinito, el potencial vale cero. A cualquier otra distancia, su valor es negativo.

b) Sí, es posible. En ambos casos, se aplica el principio de superposición:

Para el potencial: $V = V_1 + V_2$. Para el campo gravitatorio: $\mathbf{E} = \mathbf{E_1} + \mathbf{E_2}$

El potencial es un escalar y el campo es un vector. Los potenciales son siempre números negativos, por lo que su suma siempre será otro número negativo y nunca cero. Los campos pueden ser positivos o negativos, dependiendo de las direcciones y sentidos de los vectores, luego sí pueden anularse los vectores y dar lugar a un campo total nulo.

43) Dos satélites de igual masa, m, describen órbitas circulares alrededor de un planeta de masa M. Si el radio de una de las órbitas es el doble que el de la otra, razone la relación que existe entre los periodos de los dos satélites ¿Y entre sus velocidades?

Solución: según la tercera ley de Kepler, el cuadrado del período de giro de un satélite es proporcional al cubo de su radio de giro. Aplicando ésto a cada satélite:

$T^2_A = k \cdot r^3_A$; $T^2_B = k \cdot r^3_B = k \cdot (2 \cdot r_A)^3 = k \cdot 8 \cdot r^3_A$. Dividiendo miembro a miembro:

$$\frac{T^2_B}{T^2_A} = \frac{k \cdot 8 \cdot r^3_A}{k \cdot r^3_A} = 8 \quad ; \quad \frac{T_B}{T_A} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

Para las velocidades: $v = \frac{2\cdot\pi\cdot r}{T}$; $v_A = \frac{2\cdot\pi\cdot r_A}{T_A}$; $v_B = \frac{2\cdot\pi\cdot r_B}{T_B}$

Dividiendo miembro a miembro: $\frac{v_B}{v_A} = \frac{\frac{2\cdot\pi\cdot r_B}{T_B}}{\frac{2\cdot\pi\cdot r_A}{T_A}} = \frac{\frac{r_B}{T_B}}{\frac{r_A}{T_A}} = \frac{r_B\cdot T_A}{r_A\cdot T_B} = \frac{r_B}{r_A}\cdot\frac{\frac{1}{T_B}}{\frac{1}{T_A}} =$

$= 2\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

44) Explique qué es un satélite geoestacionario y calcule el valor de la altura respecto de la superficie terrestre a la que se encuentra dicho satélite.
Solución: un satélite es cualquier cuerpo (natural o artificial) que describe una órbita alrededor de otro cuerpo celeste de mayor masa. La distancia del satélite al planeta no es constante, ni tampoco su velocidad. Los satélites también siguen las leyes de Kepler. Un satélite geoestacionario es aquel que siempre se encuentra sobre la misma vertical de la superficie terrestre. Para que esto ocurra, el satélite tiene que estar en la vertical del ecuador. Su período de rotación es, por tanto, igual al de la Tierra, 24 horas.

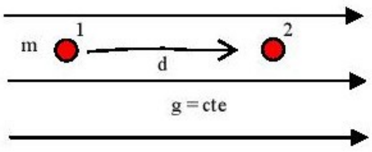
$F_G = F_C \rightarrow \frac{G\cdot M_T\cdot m}{r^2} = \frac{m\cdot v^2}{r} \rightarrow v = \sqrt{\frac{G\cdot M_T}{r}} = \frac{2\cdot\pi\cdot r}{T}$

Elevando ambos miembros al cuadrado: $\frac{4\cdot\pi^2\cdot r^2}{T^2} = \frac{G\cdot M_T}{r}$; $T^2 = \frac{4\cdot\pi^2\cdot r^3}{G\cdot M_T} = k\cdot r^3$, que no es más que la tercera ley de Kepler. Luego el radio de giro sería:

$r = \sqrt[3]{\frac{T^2\cdot G\cdot M_T}{4\cdot\pi^2}}$. Y teniendo en cuenta que: $r = R_T + h \rightarrow h = r - R_T = \sqrt[3]{\frac{T^2\cdot G\cdot M_T}{4\cdot\pi^2}} - R_T$

45) a) Una partícula se mueve en un campo gravitatorio uniforme. ¿Aumenta o disminuye su energía potencial gravitatoria al moverse en la dirección y sentido de la fuerza ejercida por el campo? ¿Y si se moviera en una dirección perpendicular a dicha fuerza? Razone las respuestas. b) Escriba una expresión del trabajo realizado por la fuerza gravitatoria sobre la partícula para un desplazamiento "d" en ambos casos. ¿En qué se invierte dicho trabajo?
Solución: Si el campo gravitatorio es uniforme significa que su valor, en módulo, es igual en todos los puntos del espacio. Si una partícula se mueve en la dirección y sentido del campo significa que es el campo gravitatorio quien está realizando el trabajo para desplazarla, este trabajo lo realiza el campo a consta de la energía potencial gravitatoria almacenada, luego la energía potencial gravitatoria disminuye conforme se avanza en la dirección y sentido del campo. Como el campo gravitatorio es conservativo, entonces el trabajo que realiza se puede poner: $W_{FC} = -\Delta Ep$
Y al ser positivo este trabajo, la variación de energía potencial será negativa, es decir, la energía potencial disminuirá.

Si la partícula se mueve en una dirección perpendicular a la fuerza gravitatoria, ésta no realizaría trabajo alguno, ya que formaría un ángulo de 90º con el desplazamiento, por lo tanto si: $W_{FC} = 0 \rightarrow -\Delta Ep = 0$ y la energía potencial gravitatoria no variaría.
Esto es lógico ya que al movernos en una dirección perpendicular al campo gravitatorio estaríamos desplazándonos por una superficie equipotencial donde la energía potencial permanece constante.
b) En el primer caso el trabajo que realizaría el campo gravitatorio, según la figura, sería:

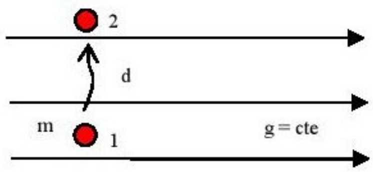


$$W = \int_1^2 F \cdot dr = \int_1^2 Fi \cdot dri = \int_1^2 F \cdot dr = \int_1^2 mg \cdot dr$$

Y como la masa y el campo son constantes:

$$W = \int_1^2 mg \cdot dr = m\, g \cdot \int_1^2 dr = m \cdot g \cdot (r_2 - r_1) = m\, g\, d$$

Este trabajo realizado se invierte en disminuir la energía potencial gravitatoria de la masa que se desplaza y, como el campo es conservativo, aumentará su energía cinética. En el segundo caso el trabajo es nulo ya que, a partir de la figura tendremos que:



$$W = \int_1^2 F \cdot dr = \int_1^2 Fi \cdot drj = \int_1^2 F \cdot dr \cdot \cos 90^o = 0$$

Por lo tanto, al ser nulo el trabajo, no variará ni la energía potencial ni la cinética.

46) a) Una masa, m, describe una órbita circular de radio R alrededor de otra mayor, M, ¿qué trabajo realiza la fuerza que actúa sobre m? b) ¿Y si m se desplazara desde esa distancia, R, hasta infinito?
Solución: a) Cuando una masa gira en una órbita circular en torno a otra sin la ayuda de fuerzas externas, el sistema es estable y la masa m se mueve en una superficie equipotencial. El trabajo realizado por una fuerza conservativa en una superficie equipotencial es cero. b) El trabajo para mover esa masa hasta el infinito es justamente la energía potencial:

$$W_{FC} = -\Delta Ep = Ep_A - Ep_B = -\frac{G \cdot M \cdot m}{R} - 0 = -\frac{G \cdot M \cdot m}{R}$$

47) Dos partículas de masas m y 2m están separadas una cierta distancia. Explique qué fuerza actúa sobre cada una de ellas y cuál es la aceleración de dichas partículas.
Solución: la fuerza de atracción entre dos masas viene dada por la ley de Newton de la gravitación universal: $F = \frac{G \cdot m_1 \cdot m_2}{r^2} = \frac{G \cdot m \cdot 2 \cdot m}{r^2} = \frac{2 \cdot G \cdot m^2}{r^2}$.

Según la tercera ley de Newton: "Cuando un cuerpo ejerce una fuerza (acción) sobre otro, el otro cuerpo le devuelve otra fuerza (reacción) de igual módulo, de sentido contrario y aplicada al otro cuerpo".
Es decir, ambas fuerzas son iguales. Sin embargo, las aceleraciones que experimentan son distintas, pues son distintas las masas:

$a_1 = \frac{F}{m} = \frac{\frac{2 \cdot G \cdot m^2}{r^2}}{m} = \frac{2 \cdot G \cdot m}{r^2}$; $a_2 = \frac{F}{2m} = \frac{\frac{2 \cdot G \cdot m^2}{r^2}}{2m} = \frac{G \cdot m}{r^2}$

Es decir, la de doble masa experimenta la mitad de aceleración que la otra.

48) Dos partículas puntuales de masa m están separadas una distancia r. Al cabo de un cierto tiempo la masa de la primera se ha reducido a la mitad y la de la segunda a la octava parte. Para que la fuerza de atracción entre ellas tenga igual valor que el inicial, ¿es necesario acercarlas o alejarlas? Razone la respuesta.
Solución: la fuerza de atracción entre dos masas viene dada por la ley de Newton de la gravitación universal: $F = \frac{G \cdot m_1 \cdot m_2}{r_1^2}$. En las nuevas condiciones: $F = \frac{G \cdot \frac{m_1}{2} \cdot \frac{m_2}{8}}{r_2^2} = \frac{G \cdot m_1 \cdot m_2}{16 \cdot r_2^2}$

Igualando ambas expresiones: $\frac{G \cdot m_1 \cdot m_2}{r_1^2} = \frac{G \cdot m_1 \cdot m_2}{16 \cdot r_2^2} \rightarrow \frac{1}{r_1^2} = \frac{1}{16 \cdot r_2^2} \rightarrow$

$\rightarrow 16 \cdot r_2^2 = r_1^2 \rightarrow 4 \cdot r_2 = r_1 \rightarrow r_2 = \frac{r_1}{4}$

Se tendrían que acercar a la cuarta parte de la distancia inicial.

49) Suponga que el planeta Tierra duplicase su radio. ¿En qué factor debería variar su masa para que el campo gravitatorio en su superficie se mantuviera constante? Razone la respuesta.
Solución: la expresión del campo gravitatorio en condiciones habituales es la siguiente:
$g_1 = \frac{G \cdot M_{T1}}{R_{T1}^2}$. Si se duplicara el radio: $g_2 = \frac{G \cdot M_{T2}}{R_{T2}^2} = \frac{G \cdot M_{T2}}{(2 \cdot R_{T1})^2} = \frac{G \cdot M_{T2}}{4 \cdot R_{T1}^2}$

Si las igualamos: $\frac{G \cdot M_{T1}}{R_{T1}^2} = \frac{G \cdot M_{T2}}{4 \cdot R_{T1}^2} \rightarrow M_{T1} = \frac{M_{T2}}{4} \rightarrow M_{T2} = 4 \cdot M_{T1}$

El radio del planeta influye al cuadrado en la fórmula e inversamente. La masa influye directamente y linealmente. Para compensar el efecto del tamaño doble, la masa habría de cuadriplicarse, pues $2^2 = 4$.

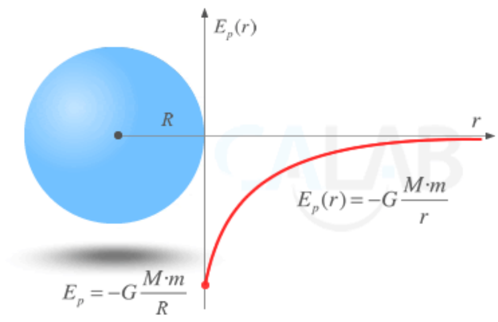
50) Razone qué relación existe entre el peso de un satélite que se encuentra en una órbita de radio r en torno a la Tierra y el que tendría en la superficie terrestre.
Solución: el peso se define como el producto de la masa del objeto por la aceleración de la gravedad en el lugar considerado (o intensidad del campo gravitatorio). En la superficie de la Tierra su valor es: $g_{superficie} = \frac{G \cdot M_T}{R_T^{\,2}}$ y su peso sería: $P_{superficie} = m \cdot g_{superficie} = \frac{G \cdot M_T \cdot m_s}{R_T^{\,2}}$

$P_{órbita} = \frac{G \cdot M_T \cdot m_s}{r^2}$. Dividiendo miembro a miembro:

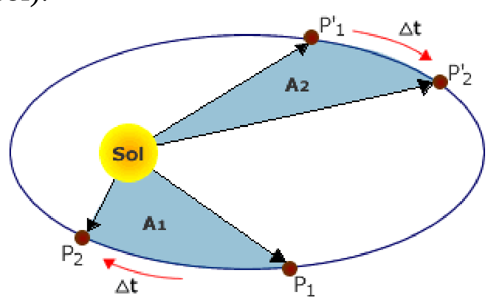
$$\frac{P_{órbita}}{P_{superficie}} = \frac{\frac{G \cdot M_T \cdot m_s}{r^2}}{\frac{G \cdot M_T \cdot m_s}{R_T^{\,2}}} = \frac{R_T^{\,2}}{r^2} = \left(\frac{R_T}{r}\right)^2$$

La relación entre sus pesos es el inverso del cociente entre los cuadrados de sus radios.

51) Razone por qué la energía potencial gravitatoria de un cuerpo aumenta cuando se aleja de la Tierra.
Solución: la energía potencial es: Ep = - $\frac{G \cdot M \cdot m}{r}$. Al aumentar r, el valor numérico de la energía potencial disminuye, pero como es una magnitud negativa, su valor real aumenta. El cero de energía potencial está en el infinito y va disminuyendo conforme el cuerpo se va acercando.



52) La Tierra está más cerca del Sol en el invierno boreal (en el hemisferio norte) que en el verano. Tanto enero como julio tienen 31 días. ¿En cuál de esos meses recorre la Tierra mayor distancia en su trayectoria? Justifique la respuesta.
Solución: según la segunda ley de Kepler, el radio vector que une el Sol con un planeta barre áreas iguales en tiempos iguales. Las áreas de la figura han de ser iguales y han de ser recorridas en el mismo tiempo. Ello explica que los planetas se muevan más rápidamente en el perihelio (cerca del sol) que en el afelio (lejos del sol):



Para que las áreas sean iguales, la distancia recorrida es mayor en las cercanías del Sol, es decir, en el invierno boreal, en el mes de enero.

53) Imaginemos dos masas puntuales. ¿Qué trabajo realiza la fuerza que actúa sobre una de las dos masas puntuales al describir media órbita circular de radio R alrededor de la otra? ¿Y si se desplazara desde esa distancia R hasta el infinito? Razone las respuestas.
Solución: al ser conservativa la interacción gravitatoria, se cumple: W = - ΔEp . En una órbita semicircular el punto inicial y el final están a la misma distancia (R) del origen del campo, por lo tanto, sus energías potenciales son iguales y en consecuencia el trabajo realizado es cero. Si se desplazara desde esa distancia R hasta el infinito, como allí, por definición, la energía potencial es cero, obtendríamos:

$$W = -\Delta Ep = Ep_A - Ep_B = Ep(r) - Ep_{\infty} = -\frac{G \cdot M \cdot m}{r}$$

54) Indique el significado de velocidad de escape y razone cómo cambia la velocidad de escape de un cuerpo si varía su altura sobre la superficie terrestre de 2 R_T a 3 R_T .
Solución: la velocidad de escape es la velocidad mínima que hay que comunicarle a un cuerpo situado en la superficie del planeta para que abandone de manera definitiva el campo gravitatorio de este. El cuerpo que se halla en la superficie del planeta con la correspondiente energía potencial:
$Ep = -\dfrac{G \cdot M_T \cdot m}{R_T}$ es dotado de la energía cinética necesaria para que llegue a una distancia infinita (Ep = 0) donde su velocidad y por consiguiente su energía cinética, se haga cero. El principio de conservación de la energía mecánica exige que:

$$\frac{1}{2} m v^2_{escape} - \frac{G \cdot M_T \cdot m}{R_T} = 0 \quad \rightarrow \quad v_{escape} = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M_T}{R_T}}$$

Teniendo en cuenta que cuando la altura es $2R_T$, la distancia al centro es $3R_T$ y que cuando la altura es $3R_T$ la distancia al centro es $4R_T$ ($r = R_T + h$), hallamos la razón entre las dos velocidades de escape:

$$\frac{v_{escape}(h = 2 \cdot R_T)}{v_{escape}(h = 3 \cdot R_T)} = \sqrt{\frac{\frac{2 \cdot G \cdot M_T}{3 \cdot R_T}}{\frac{2 \cdot G \cdot M_T}{4 \cdot R_T}}} = \sqrt{\frac{4}{3}}$$

55) Razone las respuestas a las siguientes cuestiones: a) Si el cero de energía potencial de una partícula de masa m se sitúa en la superficie de la Tierra, ¿Cuál es el valor de la energía potencial de la partícula cuando ésta se encuentra a una distancia infinita de la Tierra? b) ¿Puede ser negativo el trabajo realizado por una fuerza gravitatoria?, ¿puede ser negativa la energía potencial gravitatoria?

Solución: a) La ecuación que todos conocemos de energía potencial, parte del hecho de considerar nulo el valor de esta en el infinito. De este modo, a un cuerpo situado en la superficie terrestre le correspondería un valor: $Ep_{superficie} = -\dfrac{G \cdot M_T \cdot m}{R_T}$; $E_\infty = 0$

El trabajo que realizaría la fuerza conservativa para llevar el cuerpo de masa m desde la superficie al infinito sería, en este caso: $W_{AB} = -\Delta Ep = E_\infty - Ep_{superficie} = 0 + \dfrac{G \cdot M_T \cdot m}{R_T} = \dfrac{G \cdot M_T \cdot m}{R_T}$

Este valor del trabajo no es sino la diferencia entre las energías potenciales de los dos puntos considerados. Basándonos en este argumento, un cambio en el nivel cero de energía potencial no debe modificar el valor de la diferencia de potencial entre los dos puntos.

Si a esto le añadimos que todos los procesos espontáneos van dirigidos hacia estados de menor energía potencial, llegaremos fácilmente a comprender que:

$Ep_{superficie} = 0$; $E_\infty = \dfrac{G \cdot M_T \cdot m}{R_T}$ → $W_{AB} = -\Delta Ep = E_\infty - Ep_{superficie} = \dfrac{G \cdot M_T \cdot m}{R_T}$

Que, claro está es el mismo que el anterior, como ya presuponíamos según el argumento indicado. Pero también podemos realizar la argumentación matemáticamente. Si cambiamos la definición de energía potencial conocida por esta otra, el trabajo realizado por la fuerza conservativa para llevar un objeto de masa m desde el infinito hasta un punto de la superficie terrestre, en cuyo lugar su valor es nulo, la ecuación matemática quedaría como:

$$W_{BA} = \int_B^A F \cdot dr = \left[\frac{-G \cdot M_T \cdot m}{r}\right]_B^A = \frac{G \cdot M_T \cdot m}{r_B} - \frac{G \cdot M_T \cdot m}{r_A}$$

$Ep_A - Ep_\infty = \dfrac{-G \cdot M_T \cdot m}{R_T} + \dfrac{G \cdot M_T \cdot m}{r_\infty}$. Puesto que, debido al nivel cero elegido $Ep_A = 0$:

$$0 - Ep_\infty = \frac{-G \cdot M_T \cdot m}{R_T} - 0 \quad \rightarrow \quad Ep_\infty = \frac{G \cdot M_T \cdot m}{R_T}$$

b1) El trabajo que realiza la fuerza gravitatoria en un proceso espontáneo es siempre positivo. La separación de masas no es un proceso espontáneo, y es necesario efectuar un trabajo en contra de la fuerza gravitatoria. En este caso, el trabajo de esta fuerza gravitatoria es negativo (al no ser ella quien realiza dicho trabajo):

$$W_{\infty,B} = -\Delta Ep = Ep_\infty - Ep_B = 0 + \frac{G \cdot M_T \cdot m}{r_B} = \frac{G \cdot M_T \cdot m}{r_B} \quad \text{(Proceso espontáneo)}$$

$$W_{B,\infty} = -\Delta Ep = Ep_B - Ep_\infty = \frac{-G \cdot M_T \cdot m}{r_B} - 0 = \frac{-G \cdot M_T \cdot m}{r_B} \quad \text{(Proceso no espontáneo)}$$

b2) Al estimar el infinito como referente de energías potenciales, las energías potenciales siempre son negativas, ya que, al tratarse de una fuerza atractiva, un cuerpo abandonado en el campo gravitatorio tenderá a desplazarse hacia lugares de menor energía potencial. Si en el infinito, la energía potencial es nula, el único modo de disminuir será considerando que en cualquier otro punto diferente del infinito, estas energías potenciales sean negativas.

56) a) La energía potencial de un cuerpo de masa m en el campo gravitatorio producido por otro cuerpo de masa m’ depende de la distancia entre ambos. ¿Aumenta o disminuye dicha energía potencial al alejar los dos cuerpos? ¿Por qué? b) ¿Qué mide la variación de energía potencial del cuerpo de masa m al desplazarse desde una posición A hasta otra B? Razone la respuesta.
Solución: a) Se conoce como energía potencial gravitatoria a una función escalar característica de campos conservativos, que depende únicamente de la masa de las partículas y de la distancia entre ellas. Para un sistema formado por más de dos partículas, la energía del sistema será la suma de las energías potenciales de cada uno de los pares de partículas.

Para el caso que nos ocupa, un sistema formado por dos partículas de masas puntuales m y m´, la energía potencial asociada es:

Ep = $\frac{G \cdot m \cdot m'}{r}$. Vemos que, cuanto mayor es la distancia que las separa mayor será la energía potencial asociada (menos negativa). En el caso en el que las distancia que las separe sea muy grande (infinito), la energía potencial del sistema será nula. Así pues, se estima el valor de referencia en un punto situado en el infinito, donde, por decirlo de un modo comprensible, ninguna de las cargas “percibe” el campo gravitatorio asociado a la otra masa. A medida que estas cargas se aproximan, el valor de R va disminuyendo, con lo que el valor absoluto de la energía potencial aumenta; sin embargo, puesto que la ecuación lleva asociada un signo negativo podemos concluir con que, a medida que las masas se acercan, la energía potencial del sistema disminuye. Si consideramos que la fuerza gravitatoria es siempre atractiva, las masas se aproximarán de manera natural, de manera que la energía potencial del sistema disminuirá. Se trata de una tendencia espontánea del sistema, sin que sea necesaria la actuación de una fuerza externa. Por el contrario, la separación de masas supone un aumento de la energía potencial, proceso forzado (no espontáneo) que sólo podrá realizarse cuando una fuerza externa sea la encargada de separar las cargas.
b) Como ya hemos aludido, la energía potencial es una función (magnitud) que únicamente tiene sentido cuando el campo es conservativo. En estas circunstancias, el trabajo realizado por la fuerza conservativa (la gravitatoria en este caso) no depende de la trayectoria realizada para desplazar una masa (que está en el interior de un campo gravitatorio) desde un punto A hasta un punto B; tan sólo depende (además de las masas de las partículas) de las posiciones de los puntos A y B. Se puede entonces establecer el trabajo realizado por la fuerza como: $W_{AB} = -\Delta Ep$
Y como anteriormente se ha indicado: Ep = $\frac{G \cdot m \cdot m'}{r}$.
Es decir: $Ep_A = \frac{G \cdot m \cdot m'}{r_A}$; $Ep_B = \frac{G \cdot m \cdot m'}{r_B}$ → $\Delta Ep = Ep_B - Ep_A =$

$$= -\frac{G \cdot m \cdot m'}{r_B} + \frac{G \cdot m \cdot m'}{r_A} = G \cdot m \cdot m' \cdot \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)$$

En consecuencia, se deduce que el trabajo realizado por la fuerza gravitatoria para llevar la masa m´ desde un punto A hasta otro B de un campo gravitatorio creado por otra masa m será:
$$W_{AB} = -\Delta Ep = G \cdot m \cdot m' \cdot \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right)$$

57) El estado de "ingravidez" de los astronautas en el interior de las naves espaciales orbitando alrededor de la Tierra, ¿se debe a que la fuerza que ejerce la Tierra sobre ellos es nula?
Solución: Falso. El valor de la gravedad disminuye, como bien sabemos, con la distancia, y tan sólo se anula cuando nos encontremos en el infinito, donde cualquier interacción gravitatoria resultase nula. Desde luego que esta no es la situación existente en una nave espacial en los alrededores de la Tierra. Teniendo en cuenta que el satélite gira alrededor de la Tierra por acción de la fuerza gravitatoria, es imposible asumir un valor nulo de gravedad (intensidad del campo gravitatorio). La sensación de ingravidez es consecuencia de una apreciación de nuestro propio peso de una manera indirecta, por medio del cuerpo sobre el que nos apoyamos (una báscula, por ejemplo); si no se produce esa interacción, tal y como sucede cuando caemos en un recinto que también lo hace (nave espacial), nos sentimos "ingrávidos". Esta misma sensación podemos apreciarla por ejemplo, en las montañas rusas. El estado de ingravidez es consecuencia de que sobre el cuerpo sólo actúa la fuerza gravitatoria (pero no la interacción entre el astronauta y el suelo de la nave). De un modo menos riguroso, pero perfectamente comprensible, podemos decir que tanto nave como ocupantes están cayendo hacia la Tierra con la misma aceleración (empujados por la misma fuerza). Esto es lo que da la sensación de ingravidez.

58) ¿Por qué es algo menor la intensidad del campo gravitatorio en el ecuador que en los polos?
Solución: la gravedad en el ecuador es algo menor que en los polos porque la Tierra no es esférica y el radio ecuatorial es mayor que el radio polar. Además, en el ecuador existe otro efecto adicional no gravitatorio debido a la rotación terrestre.